Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021

C. Fuchs, V. Ziegler, W. Schmid

4. Übungsblatt, WS 2021/22 — 13.01.2022

1. Beweise das Assoziativ- und Kommutativgesetz für die Addition von natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

2. Zeige, dass für $k, l \in \mathbb{N}$ aus $k + l = 0$ stets $k = l = 0$ folgt.

3. Sei A eine abzählbare Menge und n eine natürliche Zahl. Zeige, dass A^n abzählbar ist.

4. Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine abzählbare Anzahl von endlichen Mengen. Zeige, dass $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ abzählbar ist.

5. Beweise, dass eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist.

6. Ein Passwort kann aus sechs bis acht Zeichen bestehen (Kleinbuchstaben oder Ziffern). Wie viele mögliche Passwörter gibt es? Angenommen, mindestens eines der Zeichen des Passwortes muss eine Ziffer sein. Wie viele mögliche Passwörter gibt es dann?

7. Sei $\mathcal{M}$ ein aus 4-elementigen Teilmengen von $\underline{8} = \{1, \ldots, 8\}$ bestehendes Mengensystem mit der Eigenschaft, dass jede natürliche Zahl zwischen 1 und 8 in genau drei Elementen der Menge $\mathcal{M}$ enthalten ist. Bestimme die Mächtigkeit von $\mathcal{M}$. Gibt es ein aus 3-elementigen Teilmengen bestehendes Mengensystem wie oben, sodass jede Zahl in genau fünf Elementen der Menge liegt?

8. In einem Turnier mit n Spielern spielt jeder gegen jeden genau einmal. Angenommen jeder Spieler gewinnt mindestens einmal. Zeige, dass es mindestens zwei Spieler mit derselben Anzahl von Siegen gibt.