

Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021

C. Fuchs, V. Ziegler, W. Schmid

1. Übungsblatt, WS 2021/22

02.12.2021

1. Welche der folgenden Relationen auf $A = \{a, b, c, d\}$ sind Funktionen von A nach A ? $R_1 = \{(a, d), (c, d), (d, a), (c, d), (b, a)\}$, $R_2 = \{(d, b), (a, b), (c, a), (d, b)\}$, $R_3 = \{(d, b), (c, b), (b, b), (a, b)\}$, $R_4 = \{(d, a), (c, d), (a, b), (b, a), (a, a)\}$.
2. Können die Werte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die $x^2 + y^2 = 4$ erfüllen, auch durch eine Funktion $y = f(x)$ beschrieben werden? Wo liegen die Punkte (x, y) die diese Relation erfüllen?
3. Beantworte:
 - a) Ist die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn wir im Definitions- und Bildbereich jeweils \mathbb{Q} nehmen?
 - b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, x \mapsto \frac{3x+4}{2x-1}$ bijektiv ist.
4. Welche der folgenden Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?
 - a) $f(x) = 2^x$; b) $g(x) = x^3$; c) $h(x) = x^3 - x$.
5. Sei $f : A \rightarrow B$ eine surjektive Funktion. Zeige, dass das Mengensystem $\{f^{-1}(\{b\}); b \in B\}$ der Urbildmengen $f^{-1}(\{b\}) = \{a; a \in A \wedge f(a) = b\}$ eine Partition von A ist.
6. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, $C_1, C_2 \subseteq A$ und $D_1, D_2 \subseteq B$. Zeige:
 - a) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
 - b) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$
7. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, $C_1, C_2 \subseteq A$ und $D_1, D_2 \subseteq B$. Zeige:
 - a) $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow f^{-1}(D_1) \subseteq f^{-1}(D_2)$
 - b) Für f injektiv gilt: $f(C_1) = f(C_2) \Rightarrow C_1 = C_2$
 - c) Für f surjektiv gilt: $f^{-1}(D_1) = f^{-1}(D_2) \Rightarrow D_1 = D_2$
8. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, $C_1, C_2, S \subseteq A$. Beweise oder gib ein Gegenbeispiel an:
 - a) $f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$?
 - b) $S = f^{-1}(f(S))$
 - c) $S \subseteq f^{-1}(f(S))$