Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021-5

C. Fuchs, M. Hittmeir, C. Karolus, W. Schmid

3. Übungsblatt, WS 2016/17 — 13.12.2016

1. Wo liegt der Fehler im folgenden Beweis der Aussage, dass in einer Gruppe von Tieren, in der ein Elefant ist, alle Tiere Elefanten sein müssen.
   Beweis (durch vollständige Induktion nach $n \geq 1$):
   $n = 1$: Besteht eine Gruppe, in der ein Elefant ist, nur aus einem Tier, so sind alle Tiere, nämlich nur das eine, Elefanten.
   $n \to n+1$: Die Gruppe von Tieren kann auf eine Weise in einer Reihe angeordnet werden, dass der eine Elefant unter den ersten n Tieren und unter den letzten n Tieren ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann in der Gruppe der ersten n Tiere alle Elefanten und in der Gruppe der letzten n Tiere alle Elefanten. Also sind alle $n+1$ Tiere Elefanten. //

2. Versuche für folgende Summen einen "geschlossenen Ausdruck" zu finden und bestätige diese Summenformel induktiv:
   a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$,
   b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n(n+1)$.

3. Beweise das Assoziativgesetz für die Addition von natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

4. Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $u, v \in V$. Zeige, dass es zu jedem gerichteten Weg in D von u nach v einen einfachen gerichteten Weg von u nach v gibt.

5. Zeige: $[0,1]$ und $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $[0,1]$ und $(0,1]$, $(0,1]$ und $(0,1)$ sind gleichmächtig.

6. Sei A eine abzählbare Menge und n eine natürliche Zahl. Zeige, dass A^n abzählbar ist.

7. Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine abzählbare Anzahl von endlichen Mengen. Zeige, dass $\bigcup_i A_i$ abzählbar ist.

8. Beweise, dass eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist. Folgere daraus: Die Menge $\mathcal{P}$ aller Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ ist abzählbar.