Höhere Algebra (Säule II)

Übung, LVA 405.450
C. Fuchs

Zusatz zur Vorlesung vom 14.01., WS 2013/14 — 14.01.2014

Sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta) \supseteq \mathbb{Q}$ mit $\zeta = (-1+\sqrt{3}i)/2$. Die Galoisgruppe G von $F \supseteq \mathbb{Q}$ ist isomorph zur $\mathscr{S}_3$, wobei der Isomorphismus durch Permutation der Nullstellen $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}, \alpha_2 = \sqrt[4]{2}\zeta, \alpha_3 = \sqrt[3]{2}\zeta^2$ von $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben ist. Zur Erinnerung F ist der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

Sei $\sigma = (12) \in G$ und $H_1 = \{(1), (12)\} = \langle (12) \rangle$ eine der zweielementigen Untergruppen von G. σ ist gegeben durch $\alpha_1 \mapsto \alpha_2 \mapsto \alpha_1, \alpha_3 \mapsto \alpha_3$. Daraus folgt $\sigma(\sqrt[3]{2}\zeta) = \sigma(\sqrt[3]{2})\sigma(\zeta) = \sqrt[3]{2}\zeta\sigma(\zeta) = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sigma(\zeta) = \zeta^{-1} = \zeta^2 = -\zeta - 1$. Nun gilt

$$F^{H_1} = \{\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 + d\zeta + e\sqrt[3]{2}\zeta + f\sqrt[3]{2}^2\zeta; \sigma(\alpha) = \alpha, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}.$$

Die Bedingung lautet:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= a + b\sqrt[3]{2}\zeta + c\sqrt[3]{2}^2(-\zeta - 1) + d(-\zeta - 1) + e\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{2}^2\zeta \\ &= a - d + e\sqrt[3]{2} - c\sqrt[3]{2}^2 - d\zeta + b\sqrt[3]{2}\zeta + (f - c)\sqrt[3]{2}^2\zeta\end{aligned}$$

Es folgt $a = a - d, b = e, c = -c, d = -d, e = b, f = f - c \Rightarrow c = d = 0, b = e$. Somit ist

$$F^{H_1} = \{a + b\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{2}\zeta + f\sqrt[3]{2}^2\zeta; a, b, f \in \mathbb{Q}\}.$$

Andererseits ist $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\zeta^2) = \{x + y\sqrt[3]{2}\zeta^2 + z\sqrt[3]{2}^2\zeta; x, y, z \in \mathbb{Q}\} = \{x + w\sqrt[3]{2} + w\sqrt[3]{2}\zeta + z\sqrt[3]{2}^2\zeta; x, z, w \in \mathbb{Q}\}$ und somit $K_3 = F^{H_1}$.

Wir rechnen noch als zweites Beispiel den Fall $\sigma_1 = (123), \sigma_2 = (132)$ und $H = \langle (123) \rangle = \{(1), (123), (132)\}$. Es gilt somit $\sigma_1(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta, \sigma_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta^2$. Wie oben rechnet man nach, dass $\sigma_1(\zeta) = \sigma_2(\zeta) = \zeta$ gilt. Es folgt

$$F^H = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 + d\zeta + e\sqrt[3]{2}\zeta + f\sqrt[3]{2}^2\zeta; \sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha) = \alpha, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}\}.$$

Es ist $\alpha = \sigma_1(\alpha) = a + b\sqrt[3]{2}\zeta + c\sqrt[3]{2}^2(-\zeta - 1) + d\zeta + e\sqrt[3]{2}(-\zeta - 1) + f\sqrt[3]{2}^2$. Daraus folgt $a = a, b = -e, c = -c + f, d = d, e = b - e, f = -c \Rightarrow b + e = f + c = 0, 2c = f, 2e = b \Rightarrow b = c = e = f = 0$. Wegen $\sigma_2(a + d\zeta) = a + d\zeta$ folgt nun $F^H = \{a + d\zeta; a, d \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\zeta) = K$.