Höhere Algebra (Säule II)

Übung, LVA 405.450
C. Fuchs

Zusatzblatt, WS 2013/14 — 19.11.2013

Sei $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Es gilt: α ist *algebraisch über* K $:\Leftrightarrow$ $K(\alpha) \supseteq K$ endlich $\Leftrightarrow \exists f \in K[T]\backslash\{0\}$: $f(\alpha) = 0$.

"$\Rightarrow$": $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^n\}$ ist l.a. für $n = [K(\alpha) : K] \Rightarrow \exists a_0, \ldots, a_n \in K$, nicht alle 0: $a_0\alpha^n + \cdots + a_n = 0$. Definiere $f := a_0T^n + \cdots + a_n$. Dann gilt $f \in K[T]\backslash\{0\}$ und $f(\alpha) = 0$.

"$\Leftarrow$": Betrachte $\varphi_\alpha : K[T] \to K(\alpha), a \mapsto a \in K, T \mapsto \alpha$ den Auswertungshomomorphismus bei α.

- φ_α ist surjektiv: $\varphi(K[T]) \supseteq K \cup \{\alpha\} \Rightarrow \varphi_\alpha(K[T]) \supseteq K(\alpha) \Rightarrow \varphi_\alpha(K[T]) = K(\alpha)$.
- Beschreibung von $\ker\varphi_\alpha$: $\ker\varphi_\alpha = \{f \in K[T]; f(\alpha) = 0\} \neq \{0\}$, da α algebraisch über K ist. Da $K[T]$ ein HIR ist $\Rightarrow \exists g \in K[T]\backslash\{0\}, g(\alpha) = 0$: $\ker\varphi_\alpha = (g)$. Dieses g hat kleinsten Grad unter allen Polynomen $\neq 0$ in $\ker\varphi_\alpha$. Da $\varphi(K[T])$ ein Integritätsbereich ist (als Unterring des Körpers $K(\alpha)$) $\Rightarrow (g)$ prim $\Rightarrow g$ prim $\Rightarrow g$ irreduzibel $\Rightarrow (g)$ maximales Ideal.

Somit ist $K[T]/(g) = K[T]/\ker\varphi_\alpha$ ein Körper, der (nach dem Homomorphiesatz für Ringe) isomorph zu $K(\alpha)$ ist. Sei $n = \deg(g)$. Dann gilt: $K[T]/(g) = \{f + (g); f \in K[T]\} = \{r + (g); r \in K[T] \text{ mit } \deg(r) < \deg(g) = n\} = \{a_0 + a_1T + \cdots + a_{n-1}T^{n-1} + (g); a_0, \ldots, a_{n-1} \in K\} \cong \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}\} = K(\alpha)$, wobei wir für die zweite Gleichheit die euklidische Struktur von $K[T]$ (d.h. Division mit Rest in $K[T]$) und bei der Isomorphie das Auswerten bei α verwendet haben. Die Elemente $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ sind somit ein Erzeugendensystem von $K(\alpha)$. Sie sind auch l.u., da es sonst ein Polynom in $K[T]\backslash\{0\}$ kleineren Grades als g mit Nullstelle α geben würde. Daher ist $[K(\alpha) : K] = n < \infty$.

Das Polynom g im Beweis heißt das *Minimalpolynom* von α. Das Minimalpolynom ist nur bis auf Einheiten bestimmt; durch Normierung wird es eindeutig. Es gilt: g ist das Minimalpolynom von $\alpha \Leftrightarrow g$ ist Polynom kleinsten Grades in $K[T]\backslash\{0\}$ mit $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g$ ist irreduzibles Polynom in $K[T]\backslash\{0\}$ mit $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (g) = \ker\varphi_\alpha$.

$\deg(\alpha) := \deg g = [K(\alpha) : K]$ heißt der *Grad* von α über K.

Für ein über K algebraisches $\alpha \in L$ gilt somit: $K(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}; a_0, \ldots, a_{n-1} \in K, n = \deg(\alpha)\} \cong K[T]/(g)$.