Höhere Algebra (Säule II)

Übung, LVA 405.451

C. Fuchs, R. Paulin

2. Klausur, WS 2013/14

31.01.2014

Name:...

Matrikelnummer:...

Wichtige Bemerkungen:

- Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- **Alle Rechenschritte (inklusive Zwischenresultate und Lösungswege) sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!**
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe, verwenden Sie keine rote Farbe und keine Bleistifte.
- Erlaubte Hilfsmittel: Es sind keine schriftlichen Hilfsmittel und nur einfache Taschenrechner (mit einer Ausgabezeile) erlaubt.
- **Arbeitszeit:** 90 Minuten

1. Entscheide für die folgenden Polynome $f \in K[X]$ jeweils, ob f ein separables Polynom ist (p bezeichnet eine beliebige Primzahl):
   a) $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$;
   b) $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = 2X^{50} - 6X^{17} + 30$;
   c) $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = X^5 - 2X^4 + 6X$;
   d) $K = \mathbb{F}_p(T)$, $f(X) = T^p + X$;
   e) $K = \mathbb{F}_p(T)$, $f(X) = X^p + T$.

2. Finde für folgende Körpererweiterungen ein primitives Element:
   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{27}) \supseteq \mathbb{Q}$;
   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \supseteq \mathbb{Q}$.

3. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ und $\alpha = \sqrt[4]{3} + i \in K$. Führe das folgende Programm durch:
   a) Zeige, dass $[K : \mathbb{Q}] = 8$.
   b) Zeige, dass $K \supseteq \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.
   c) Berechne die $\mathbb{Q}$-Konjugierten von α. (Hinweis: Finde die Konjugierten von $\sqrt[4]{3}$ und i und verwende dann b).)
   d) Zeige, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
   e) Ist α ganz über $\mathbb{Z}$?

4. Sei $F \supseteq K$ eine endliche Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(F/K)$. Wir können die Abbildungen κ und γ aus dem Hauptsatz der Galoistheorie wie folgt auf beliebige Teilmengen (anstatt Zwischenkörper und Untergruppen) ausweiten: Für eine Teilmenge $T \subseteq F$ sei $\kappa(T) = \{\sigma \in G; \forall \alpha \in T\colon \sigma(\alpha) = \alpha\}$ und für eine Teilmenge $S \subseteq G$ sei $\gamma(S) = \{\alpha \in F; \forall \tau \in S\colon \tau(\alpha) = \alpha\}$. Zeige, dass

   $\kappa(\gamma(S)) = \langle S \rangle$, die von S erzeugte Untergruppe ist,

   oder wahlweise dass

   $$\gamma(\kappa(T)) = K(T)$$

   gilt.

1. a) Es gilt $f = (X-1)^2(X-2)$ und daher ist f nicht separabel über $\mathbb{Q}$. b) Hier gilt $f = 2(X^{50} - 3X^{17} + 15)$. Das Polynom $X^{50} - 3X^{17} + 15$ ist mit $p = 3$ irreduzibel wegen Eisenstein und Gauß. Daher ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und daher separabel über $\mathbb{Q}$. c) Hier gilt $f = X(X^4 - 2X^3 + 6)$. Das Polynom $X^4 - 2X^3 + 6$ ist nach Eisenstein und Gauß irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und besitzt daher nur einfache Nullstellen, von denen alle jedenfalls von 0 verschieden sind. Daher ist f ebenfalls separabel über $\mathbb{Q}$. d) Das Polynom ist linear und daher separabel. e) Sei α eine p-te Wurzel von T in einem Erweiterungskörper von K, d.h. es gilt $\alpha^p = T$. Dann gilt $(X+\alpha)^p = X^p + \alpha^p = X^p + T = f$ und somit ist f nicht separabel über K.

2. a) Offenbar gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{27}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, wobei die letzte Gleichheit in der Vorlesung gezeigt wurde. b) Der gegebene Körper hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ als Unterkörper, die Grad 2 bzw. 3 über $\mathbb{Q}$ haben. Somit gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6$. Andererseits ist $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ ein Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ und $\mathbb{Q}$, der wegen $X^6 - 2 = 0$ ebenfalls Grad 6 hat. Es folgt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$, womit ein primitives Element gefunden ist.

3. a) Der Körper K hat $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ sowie $\mathbb{Q}(i)$ als Unterkörper, die Grad 4 bzw. 2 über $\mathbb{Q}$ haben. Da aber offenbar $\mathbb{Q}(i) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) = \mathbb{Q}$ ist der Grad von $K \supseteq \mathbb{Q}$ gleich 8. b) K ist Zerfällungskörper von $X^4 - 3$ und somit normal über $\mathbb{Q}$ und als endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ separabel, also insgesamt Galois. c) Die $\mathbb{Q}$-Konjugierten von $\sqrt[4]{3}$ sind $\pm\sqrt[4]{3}, \pm i\sqrt[4]{3}$ nämlich die Nullstellen (in $\mathbb{C}$) von $X^4 - 3 = 0$. Die $\mathbb{Q}$-Konjugierten von i sind $\pm i$. Wegen a) und b) sind die acht Elemente der Galoisgruppe eindeutig festgelegt durch $\sqrt[4]{3} \mapsto \pm\sqrt[4]{3}, \pm i\sqrt[4]{3}, i \mapsto \pm i$. Somit sind die $\mathbb{Q}$-Konjugierten von α gleich $\pm\sqrt[4]{3} \pm i, \pm i(\sqrt[4]{3} \pm 1)$. Diese sind alle paarweise verschieden, wie man durch Vergleich der Real- und Imaginärteile sofort einsieht. d) Da wir die $\mathbb{Q}$-Konjugierten von α kennen ist klar, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 8$ gilt. Daraus folgt $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. e) Die beiden Zahlen $\sqrt[4]{3}$ und i sind ganz über $\mathbb{Z}$. Da die über $\mathbb{Z}$ ganzen Elemente einen Ring bilden folgt, dass α ganz über $\mathbb{Z}$ ist.

4. Es gilt $\kappa(\gamma(S)) = \{\sigma \in G; \forall\alpha \in \gamma(S)\colon \sigma(\alpha) = \alpha\}$ und $\gamma(S) = \{\alpha \in F; \forall\tau \in S\colon \tau(\alpha) = \alpha\}$. Ist $\rho \in S$, so gilt für alle $\alpha \in \gamma(S)$, dass $\rho(\alpha) = \alpha$ und somit $\rho \in \kappa(\gamma(S))$. Wir zeigen, dass $\kappa(\gamma(S))$ eine Untergruppe von G ist: Klarerweise ist $\mathrm{id} \in \kappa(\gamma(S))$. Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \kappa(\gamma(S))$ so folgt: $\forall\alpha \in \gamma(S)\colon \sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha) = \alpha$. Somit $\forall\alpha \in \gamma(S)\colon \sigma_1\sigma_2^{-1}(\alpha) = \alpha$. Somit ist $\sigma_1\sigma_2^{-1} \in \kappa(\gamma(S))$. Sei nun H eine Untergruppe von G mit $H \supseteq S$. Dann folgt $\gamma(H) \subseteq \gamma(S)$ und $H = \kappa(\gamma(H)) \supseteq \kappa(\gamma(S))$, denn für die jeweils größere Menge ist die definierende Eigenschaft stärker und somit einschränkender. Für die Gleicheit $H = \kappa(\gamma(S))$ haben wir den Hauptsatz der Galoistheorie verwendet. Somit ist $\kappa(\gamma(S))$ eine S umfassende Untergruppe von G, die in jeder S umfassenden Untergruppe enthalten ist. Insgesamt also $\kappa(\gamma(S)) = \langle S\rangle$.