Höhere Algebra (Säule II)

Übung, LVA 405.451

C. Fuchs, R. Paulin

1. Klausur, WS 2013/14

29.11.2013

Name:...

Matrikelnummer:..

Wichtige Bemerkungen:

- Alle Aufgaben haben dasselbe Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- **Alle Rechenschritte (inklusive Zwischenresultate und Lösungswege) sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!**
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe, verwenden Sie keine rote Farbe und keine Bleistifte.
- Erlaubte Hilfsmittel: Es sind keine schriftlichen Hilfsmittel und nur einfache Taschenrechner (mit einer Ausgabezeile) erlaubt.
- **Arbeitszeit:** 90 Minuten

1. Zeige:
   a) $R = \{\frac{1}{2}(a + b\sqrt{2}); a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist kein Integritätsbereich.
   b) $R = \{a + b\omega; a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\omega]$ mit $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ ist ein Integritätsbereich (Sie können verwenden, dass ω Nullstelle des Polynoms $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ ist).

2. Sei $R = \mathbb{Z}[\omega]$ wie im zweiten Teil der letzten Aufgabe. Beachte, dass $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ und $\omega^3 = 1$.
   a) Zeige, dass R mit $N(a + b\omega) = |a + b\omega|^2 = (a + b\omega)(a + b\overline{\omega}) = a^2 - ab + b^2$ ein euklidischer Ring ist. ($|z|$ und $\overline{z}$ bezeichnen den Absolutbetrag und die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl.)
   b) Wie lauten die Einheiten in R?
   c) Zeige, dass $5 + 2\omega$ irreduzibel ist.

3. Zeige, dass das folgende Polynom

$$\sum_{1 \leq i,j,k \leq 4,\, i \neq j,\, i \neq k,\, j < k} X_i^2 X_j X_k$$

   symmetrisch ist und drücke es als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ in den Variablen $X_1, \ldots, X_4$ aus.

4. Welches der folgenden Polynome ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ und warum?
   a) $4X^2 + 8$,
   b) $3X^4 + 6X + 6$,
   c) $X^4 - 7X^2 + 5X - 3$,
   d) $6X^{10} - 15X^6 + 1$,
   e) $X^4 - 5X^3 + 2X + 3$.