Höhere Algebra (Säule II)

Übung, LVA 405.451

C. Fuchs, R. Paulin

1. Klausur - Lösungen, WS 2013/14 **29.11.2013**

1. a) R ist wegen $(1/2)^2 = 1/4 \notin R$ nicht bzgl. der Multiplikation abgeschlossen, daher kein Ring und daher kein Integritätsbereich.
b) R enthält $0, 1$ und ist wegen $(a + b\omega) \pm (c + d\omega) = (a \pm c) + (b \pm d)\omega \in R$ bzgl. der Addition abgeschlossen. Wir müssen noch Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation zeigen: $(a + b\omega)(c + d\omega) = ac + (ad + bc)\omega + bd\omega^2 = ac + (ad + bc)\omega + bd(-1 - \omega) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega \in R$. Somit ist R ein Unterring von $\mathbb{C}$ und als solcher ein Integritätsbereich.

2. a) Beachte zuerst, dass $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$ für $z_1, z_2 \in R$ gilt. Wir betrachten $(a + b\omega)/(c + d\omega) = (a + b\omega)(c + d\overline{\omega})/N(c + d\omega) = p + q\omega$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ beachte dabei, dass $\overline{\omega} = (-1 - \sqrt{3}i)/2 = -1 - (-1 + \sqrt{3}i)/2 = -1 - \omega$ und dass wir im Zähler dann die Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation von R verwenden können. Sei e, f jeweils der ganzzahlige Teil von p, q und r, s der gebrochene Teil von p, q, d.h. $p = e+r, q = f+s, e, f \in \mathbb{Z}, r, s \in \mathbb{Q}, |r|, |s| \leq 1/2$. Dann gilt $N(r+s\omega) = r^2-rs+s^2 \leq 1/2 < 1$ und wegen der Multiplikativität $N((a+b\omega)-(c+d\omega)(e+f\omega)) = N(c+d\omega)N((a+b\omega)/(c+d\omega)-(e+f\omega)) = N(c+d\omega)N(r+s\omega) < N(c+d\omega)$. Somit ist R mit $N : R\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ eine euklidische Normfunktion und daher R ein euklidischer Ring.
b) Für eine Einheit $a + b\omega \in R$ gilt $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2 = \pm 1 = (a - b/2)^2 + 3b^2/4$. Die Gleichung kann nur dann gelten wenn $a = \pm 1, b = 0$. Somit $R^\times = \{\pm 1\}$.
c) Es ist $N(5 + 2\omega) = 25 - 10 + 4 = 19$ eine Primzahl. Daher ist $5 + 2\omega$ irreduzibel (falls $5 + 2\omega = ab \Rightarrow 19 = N(ab) = N(a)N(b) \Rightarrow N(a) = \pm \vee N(b) = \pm \Rightarrow a = \pm 1 \vee b = \pm 1$).

3. Das Polynom lautet $f = X_1^2X_2X_3 + X_1^2X_2X_4 + X_1^2X_3X_4 + X_1X_2^2X_3 + X_1X_2^2 + X_4 + X_2^2X_3X_4 + X_1X_2X_3^2 + X_1X_3^2X_4 + X_2X_3^2X_4 + X_1X_2X_4^2 + X_1X_3X_4^2 + X_2X_3X_4^2$. Es treten genau alle Terme der Form $X_i^2X_jX_k$ auf; daher ist das Polynom invariant unter Permutation der Indizes und daher symmetrisch. Der lexikographisch größte Term lautet $X_1^2X_2X_3$. Die elementarsymmetrischen Polynome sind $\sigma_1 = X_1+X_2+X_3+X_4, \sigma_2 = X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4, \sigma_3 = X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4, \sigma_4 = X_1X_2X_3X_4$. Somit $f - \sigma_1^{2-1}\sigma_2^0\sigma_3^1\sigma_4^0 = -4X_1X_2X_3X_4 = -4\sigma_4$ und daher $f = \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

4. a) $4X^2 + 8 = 4(X^2 + 2)$ und $X^2 + 2$ ist wegen Eisenstein (mit $p = 2$) und Gauß irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
b) $3X^4 + 6X + 6 = 3(X^4 + 2X + 2)$ und $X^4 + 2X + 2$ ist wegen Eisenstein (mit $p = 2$) und Gauß irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
c) X^4-7X^2+5X-3 hat bei -3 eine Nullstelle $(81-7\cdot 9+5(-3)-3 = 81-63-15-3 = 0)$ und ist daher reduzibel über $\mathbb{Q}$.
d) $6X^{10}-15X^6+1 = X^{10}(Y^{10}-15Y^4+6)$ mit $Y = 1/X$ und das Polynom $Y^{10}-15Y^6+6$ ist wegen Eisenstein (mit $p = 3$) und Gauß irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

e) Die möglichen rationalen Nullstellen sind $\pm 1, \pm 3$, die aber alle nicht Nullstellen sind. Daher besitzt das Polynom keine Linearfaktoren über $\mathbb{Q}$. Ist es reduzibel, so gilt $X^4 - 5X^3 + 2X + 3 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) = X^4 + (a+c)X^3 + (b+d+ac)X^2 + (ad+bc)X + bd \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Also ist $a + c = -5, b + d + ac = 0, ad + bc = 2, bd = 3$. Modulo 2 ist dann $a + c = 1, b + d + ac = 0, ad + bc = 0, bd = 1$; somit $b = d = 1, a + c = 0 = 1$, Widerspruch! Eine solche Zerlegung existiert also nicht und daher ist das Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$.