Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031

C. Fuchs, I. Vukusic

7. Übungsblatt, SS 2022

06.05.2022

1. Modifiziere den Beweis des Satzes von Euklid (1. Beweis von 2.3.8), um zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k-1$ (bzw. $4k+3$) gibt.

2. Zeige, dass für die n-te Primzahl p_n gilt $p_n \leq 2^{2^n}$.

3. Sei $p_1 = 2$ und p_{n+1} der größte Primteiler von $p_1 \cdots p_n + 1$, also $p_2 = 3, p_3 = 7, p_4 = 43, p_5 = 139$. Zeige, dass 5 nicht in der Menge $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ vorkommt.

4. Zwei verschiedene natürliche Zahlen a, b heißen befreundet, falls $\sigma(a) = a+b = \sigma(b)$.
   a) Überprüfe, dass die Zahlen 220 und 284 befreundet sind.
   b) Zeige: Für eine feste natürliche Zahl n setzen wir $x = 3 \cdot 2^n - 1, y = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ und $z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. Wenn x, y und z Primzahlen sind, dann sind die beiden Zahlen $a = 2^n xy$ und $b = 2^n z$ befreundet.

5. Sei k eine ungerade natürliche Zahl. Zeige, dass in der Folge $k+1, k^2+1, k^4+1, k^8+1, \ldots$ der ggT von je zwei Folgenglieder stets 2 ist. Folgere daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.