

Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031
C. Fuchs, I. Vukusic

6. Übungsblatt, SS 2022

29.04.2022

1. Finde die Primfaktorzerlegung der Zahlen 360^{360} , 540^{180} , $2^{32} - 1$ und $3^8 - 2^8$ und bestimme dann $\text{ggT}(360^{360}, 540^{180})$ und $\text{ggT}(2^{32} - 1, 3^8 - 2^8)$.
2. Zeige, dass alle Primzahlen $\neq 2, 3$ von der Form $6n - 1$ oder $6n + 1$ mit $n \geq 1$ sind. Gilt auch die Umkehrung?
3. Finde alle Primzahlen p für die $p + 2$ und $p + 4$ ebenfalls Primzahlen sind.
4. Sei $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler d von n in \mathbb{N} , d.h. $\sigma(n) = \sum_{d \in T} d$ mit $T = \{t \in \mathbb{N}; t|n\}$. Zeige, dass für alle teilerfremden $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.
5. Eine natürliche Zahl n heißt vollkommen, falls $\sigma(n) = 2n$ gilt. Zeige: a) Die Zahlen 6, 28 und 496 sind vollkommen. b) Ist $M_n = 2^n - 1$ eine Mersennsche-Primzahl, so ist $2^{n-1}M_n$ eine vollkommene Zahl.