Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031

C. Fuchs, I. Vukusic

4. Übungsblatt, SS 2022

01.04.2022

1. Zeige, dass "assoziiert" eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus? Zeige zudem, dass die Klasse von 1 eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation von $\mathbb{Z}$ bildet.

2. Zeige die folgenden Teilbarkeitsregeln: $\pm 1|a, \pm a|a, a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c, a|b \wedge b|a \Rightarrow a \sim b, a|b \Rightarrow \forall c : ac|bc$, $a|b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|, a|0$.

3. Es seien $a_1, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen derart, dass $a_1 \cdots a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.
   a) Zeige, dass keine der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ durch 3 teilbar ist.
   b) Beweise, dass mindestens eine der Zahlen $a_1 + 1, \ldots, a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

4. Führe für folgende Paare ganzer Zahlen die Division mit Rest durch: -47 und 12, -128 und 15, 773 und 337, $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ und $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ sowie $2^{32} - 1$ und $4^8 + 1$.

5. Sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweise die Formeln $F_0 \cdots F_n = F_{n+1} - 2$ und $\mathrm{ggT}(F_n, F_m) = 1$ für $n \neq m$.