Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031

C. Fuchs, I. Vukusic

3. Übungsblatt, SS 2022

25.03.2022

1. Sei R ein Ring. Eine nichtleere Teilmenge I von R heißt ein Ideal von R, wenn mit $i, j \in I$ auch $i + j \in I$ ist und für alle $i \in I$ und $r \in R$ gilt $ir \in I$ und $ri \in I$.
   a) Zeige, dass $0 \in I$ sowie $-i \in I$ für $i \in I$ und dass somit $(I, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.
   b) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $n\mathbb{Z} = \{na; a \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist.

2. Sei R ein Ring und I ein Ideal von R. Zeige, dass durch $a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in I$ eine Äquivalenzrelation auf R definiert ist. Wie sehen die Äquivalenzklassen und wie sieht die Klasseneinteilung aus?

3. Sei R ein Ring, I ein Ideal von R und R/I die Klasseneinteilung zur Relation aus der vorigen Aufgabe. Zeige, dass durch $[a]+[b] := [a+b]$ und $[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$ wohldefinierte Operationen auf R/I definiert sind, welche R/I zu einem Ring machen.

4. Zeige, dass der einzige Unterring von $\mathbb{Z}$ gleich $\mathbb{Z}$ ist.

5. Seien R, S Ringe, I ein Ideal von R und $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus mit $I \subseteq \ker(\varphi)$. Wir bezeichnen mit R/I den Ring aus Aufgabe 3. Zeige, dass durch $[a] \mapsto \varphi(a)$ ein Epimorphismus von R/I nach $\varphi(R)$ gegeben ist.