Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031
C. Fuchs, I. Vukusic

2. Übungsblatt, SS 2022

18.03.2022

1. Beweise die Distributivgesetze sowie die Gesetze mit 0 und 1 in $\mathbb{Z}$: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a + 0 = 0 + a = a$ sowie $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (falls $a \neq 0$).

2. Zeige, dass $-[(m,n)] = [(n,m)]$ das additive Inverse von $[(m,n)]$ in $\mathbb{Z}$ liefert. Überlege für die damit definierte Subtraktion, welche Eigenschaften (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, etc.) erfüllt sind und welche nicht.

3. Zeige, dass die Ordnung auf $\mathbb{Z}$ linear ist und die Monotonieeigenschaften erfüllt, dass also aus $a \leq b$ für $c \in \mathbb{Z}$ stets $a + c \leq b + c$ bzw. $a \cdot c \leq b \cdot c$ (sofern nun zusätzlich c nicht-negativ ist) folgt.

4. Beweise das Prinzip des kleinsten Elements in $\mathbb{Z}$: Jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein kleinstes Element.

5. Überprüfe, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \{a + b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$) einen Ring bildet.