

Zahlentheorie

Übung, LVA 405.031
C. Fuchs, I. Vukusic

11. Übungsblatt, SS 2022

10.06.2022

1. Zeige, dass $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)d/\varphi(d)$ mit $d = \text{ggT}(n, m)$ ist. Folgere eine Formel für $\varphi(n^k)$ und berechne damit $\varphi(10^k)$.
2. Zeige, dass $\varphi(n) \geq \sqrt{n/2}$ für alle $n > 0$ ist.
3. Zeige: $\varphi(n)$ ist eine Zweierpotenz genau dann, wenn n das Produkt einer Zweierpotenz mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen ist.
4. Sei p eine Primzahl. Zeige, dass $(a + b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt. Folgere durch Induktion, dass $(a_1 + \dots + a_n)^p = a_1^p + \dots + a_n^p \pmod{p}$. Mittels $a_1 = \dots = a_n = 1$ erhalten wir wieder den kleinen Satz von Fermat (das liefert einen alternativen Beweis ohne Verwendung des Satzes von Euler).
5. Berechne $\varphi(72)$ und überprüfe den Satz von Euler anhand des Beispiels $a = 5$. Wie lautet das Inverse von 5 in \mathbb{Z}_{72} ?