Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081
C. Fuchs, S. Heintze

9. Übungsblatt, WS 2020/21 — 09.12.2020

1. Sei σ eine ζ-Sesquilinearform auf V mit $\zeta \in \mathrm{Aut}(K)$ und β, γ Basen von V. Begründe die Transformationsformel $M_\gamma(\sigma) = {}^tTM_\beta(\sigma)\zeta(T)$ mit $T = M_{\gamma\beta}(\mathrm{id}_V)$.

2. Sei $\zeta \in \mathrm{Aut}(K)$. Eine ζ-Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ wird alternierend genannt, wenn $\sigma(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeige, dass dann $\sigma(v, w) = -\sigma(w, v)$ gilt. Folgere daraus, dass σ somit eine Bilinearform sein muss (d.h. es gilt automatisch $\zeta = \mathrm{id}_K$). Wie sieht die Koordinatenmatrix von σ aus (also wann wird man eine Matrix alternierend nennen)?

3. Gegeben seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$. Zeige, dass $\sigma : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ eine Bilinearform ist, und bestimme die Koordinatenmatrix von σ bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

4. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $\sigma : V\times V \to \mathbb{R}$ symmetrischen Bilinearformen sind. Liegen Skalarprodukte vor?

   a) Sei $V = M(n, m)(\mathbb{R})$ und $\sigma(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

   b) Es seien $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, die Elemente $m_1, \dots, m_k \in M$ verschieden, $V := \{f : M \to \mathbb{R}\}$ und $\sigma(f, g) = f(m_1)g(m_1) + \cdots + f(m_k)g(m_k)$.

   c) Sei V der Vektorraum der konvergenten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $\sigma((a_n)_n, (b_n)_n) = \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)$.