Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081

C. Fuchs, S. Heintze

8. Übungsblatt, WS 2020/21 — 02.12.2020

1. Sei V ein 6-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ bzgl. einer Basis β von V gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es sei bekannt, dass einer der Eigenwerte von φ gleich i ist und dass es insgesamt nur 2 verschiedene Eigenwerte gibt. Berechne mit diesem Wissen die JNF von φ.

2. Gegeben sind die Matrizen in $M_4(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \\ -8 & 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimme zu A bzw. B ähnliche Matrizen in JNF und zeige damit: die beiden Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom sind aber nicht ähnlich.

3. Sei V ein 9-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $P_\varphi(x) = (x+3)x^2(x-2)^6, M_\varphi(x) = (x+3)x(x-2)^3$. Bestimme alle möglichen JNFs von φ.

4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
Berechne die JNF J von A sowie eine reguläre Matrix P mit $PJ = AP$ und berechne damit A^{2020}. (Hinweis: Es gilt $J = P^{-1}AP$ und somit (warum?) $J^{2020} = P^{-1}A^{2020}P$.)