# Lineare Algebra II und Geometrie

**Übung, LVA 405.081**

**C. Fuchs, S. Heintze**

## 7. Übungsblatt, WS 2020/21 — 25.11.2020

1. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stelle $A^3$ und $A^4$ mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton je als Linearkombination von $A^0 = E_3, A, A^2$ dar.

2. Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Gegeben sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ durch

$$M_{\beta\beta}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von $\varphi$.

3. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ gegeben durch

$$M_{\beta\beta}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Unterräume $U_1 = \langle\{\,^t(-1,0,1,0),\,^t(0,-1,0,1)\,^t(1,0,0,0)\}\rangle, U_2 = \langle\{\,^t(0,1,0,0)\}\rangle$ $\varphi$-invariant sind und dass sie $V$ so zerlegen, dass $\varphi$ eine Koordinatenmatrix (welche?) in Form einer erweiterten Diagonalmatrix besitzt. Wie lautet die Jordan-Normalform von $\varphi$?

4. Gegeben sei die reelle Matrix $B$ aus Aufgabe 4 vom 6. Übungsblatt. Berechne die JNF von $B$ sowie eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ mit $P^{-1}BP = J$. Wie lautet das Minimalpolynom von $B$?