Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081

C. Fuchs, S. Heintze

6. Übungsblatt, WS 2020/21 — 18.11.2020

1. Sei $M_A(x) = x^r + \eta_1 x^{r-1} + \cdots + \eta_r \in K[x]$ das Minimalpolynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$. Zeige:
   a) A ist genau dann regulär, wenn $\eta_r \neq 0$.
   b) Falls A regulär ist, so ist A^{-1} ein Polynom in A vom Grad $r-1 < n$ (d.h. $A^{-1} = f(A)$ mit $f \in K[x]$ vom Grad $r-1$).

2. Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $A^k = 0$ für ein $k > n$. Zeige, dass $A^n = 0$.

3. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass $\{0\}$, V, $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$ φ-invariante Unterräume von V sind. Bestimme zudem alle φ-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$, wobei $\varphi = \varphi_A$ und
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
   Berechne jeweils eine Basis der Haupträume von $\varphi = \varphi_B$ zu den Eigenwerten $2, -3$ und 6. Entspricht diese Basis der Situation in 2.3.7?