Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081
C. Fuchs, S. Heintze

4. Übungsblatt, WS 2020/21 — 04.11.2020

1. Sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Bestimme die geometrische und algebraische Vielfachheit sämtlicher Eigenwerte der Matrix
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Zeige, dass es für $\lambda \in K$ und natürliche Zahlen k, n mit $1 \leq k \leq n$ stets eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ gibt, die λ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k und geometrischer Vielfachheit 1 besitzt.

3. Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme eine reguläre Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ so, dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist, wobei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$