

Lineare Algebra II und Geometrie

LVA 405.080

C. Fuchs

Prüfungsinformationen und -katalog, WS 2020/21

30.09.2020

Die Vorlesungsprüfung ist schriftlich (90 Minuten) und richtet sich nach dem Vorlesungsstoff. Neben Rechenfertigkeiten sollten die wichtigsten Resultate aus der Vorlesung wiedergegeben werden können. Ausserdem sollte man, die in diesen Sätzen auftretenden Begriffe erklären, sowie die wichtigsten Beweisideen angeben können.

Hier eine Liste von möglichen Prüfungsfragen aufgelistet in der Reihenfolge der zugehörigen Kapitel:

1. Was versteht man unter einem Eigenwert und was unter einem Eigenvektor?
2. Was ist das Spektrum? Was versteht man unter dem Eigenraum?
3. Wie kann man die Eigenwerte berechnen (inklusive Begründung)?
4. Was ist das charakteristische Polynom?
5. Wie ist das charakteristische Polynom von $f \in \text{End}(V)$ definiert (inklusive Begründung)?
6. Zeige, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen.
7. Was versteht man unter der algebraischen und geometrischen Vielfachheit?
8. Zeige, dass die geometrische Vielfachheit stets kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.
9. Zeige, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten l.u. sind.
10. Wann nennt man $f \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar?
11. Wann nennt man eine quadratische Matrix diagonalisierbar?
12. Wie hängen die letzten beiden Begriffe zusammen?
13. Formuliere und beweise ein Kriterium für Diagonalisierbarkeit.
14. Was ist ein Annullatorpolynom? Was ist das Minimalpolynom?
15. Zeige, dass jedes Annullatorpolynom ein Vielfaches des Minimalpolynoms ist.
16. Was sagt der Satz von Cayley-Hamilton?
17. Beweise den Satz von Cayley-Hamilton.
18. Wann nenn man einen Unterraum f -invariant? Welche Eigenschaften hat f -Invarianz?
19. Was versteht man unter einem Hauptvektor? Was ist die Stufe? Was ist der Hauptraum?
20. Zeige, dass der Hauptraum f -invariant ist.
21. Was versteht man unter einer Jordan-Matrix?

22. Was besagt der Satz von der Jordan-Normalform?
23. Wie läßt sich das Minimalpolynom aus der Jordan-Normalform ablesen?
24. Was versteht man unter einer ζ -Sesquilinearform?
25. Was ist die Koordinatenmatrix einer ζ -Sesquilinearform? Wie lautet die Transformationsformel für solche Matrizen?
26. Wann nennt man zwei Matrizen ζ -kongruent?
27. Was versteht man unter einem Skalarprodukt?
28. Wie definiert man eine Längenfunktion mit Hilfe des Skalarproduktes?
29. Formuliere und beweise die (Cauchy-)Schwarzsche Ungleichung.
30. Formuliere und beweise die Dreiecksungleichung.
31. Wie wird das Winkelmaß mit Hilfe des Skalarproduktes definiert?
32. Was versteht man unter der formalen Fourierreihe?
33. Formuliere und beweise den Satz zum Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.
34. Was versteht man unter dem orthogonalen Komplement?
35. Formuliere und beweise den Hauptsatz über orthogonale Komplemente.
36. Was versteht man unter einer Orthogonalprojektion.
37. Wann heißt eine Abbildung isometrisch?
38. Was versteht man unter der isometrischen Gruppe?
39. Definiere für eine Matrix die Begriffe orthogonal, unitär, symmetrisch, hermitesch, schief-symmetrisch, schiefhermitesch, normal.
40. Was versteht man unter der orthogonalen, speziellen orthogonalen bzw. unitären Gruppe.
41. Charakterisiere, wann eine quadratische Matrix orthogonal bzw. unitär ist (inklusive Beweis).
42. Wann heißen Matrizen orthogonal- bzw. unitär-ähnlich?
43. Was ist die adjungierte Abbildung?
44. Zeige, dass die adjungierte Abbildung stets (Voraussetzung?) existiert und eindeutig ist.
45. Wann heißt f selbstadjungiert? Wie nennt man eine solche Abbildung im euklidischen bzw. unitären Fall und warum?
46. Welche Eigenschaften hat eine normale Abbildung?
47. Wie hängen die Eigenwerte einer normalen Abbildung f mit den Eigenwerten von f^\wedge zusammen?

48. Formuliere und beweise den Spektralsatz für normale Abbildungen?
49. Charakterisiere wann f hermitesch/schiefhermitesch/unitär ist?
50. Charakterisiere wann f symmetrisch/schiefsymmetrisch/orthogonal ist?
51. Formuliere und beweise den Satz zur Hauptachsentransformation.
52. Wie überprüft man eine symmetrische Bilinearform auf positive Definitheit?