Endliche Körper und Codierung

Übung, LVA 405.351

C. Fuchs

5. Übungsblatt, WS 2020/21 — 12.11.2020

1. Zeige:
   a) $\mathbb{F}_{q^k}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{F}_{q^n}$ genau dann, wenn $k|n$.
   b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{q^{n!}}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$.

2. Zeige:
   a) Das Minimalpolynom eines Elementes von $\mathbb{F}_{q^m}$ bzgl. $\mathbb{F}_q$ existiert und ist eindeutig. Außerdem ist es irreduzibel.
   b) Falls $M(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ ein monisches irreduzibles Polynom ist, das $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}$ als Nullstelle besitzt, so ist M das Minimalpolynom von α bzgl. $\mathbb{F}_q$.

3. Zeige: Das Minimalpolynom $M(x)$ eines Elementes $\beta \in \mathbb{F}_{p^m}$ hat Grad $\leq m$; ist β primitives Element, so gilt $\text{grad} M(x) = m$.

4. Konstruiere die endlichen Körper $\mathbb{F}_{27}$ und $\mathbb{F}_{25}$. Bestimme dazu jeweils ein irreduzibles Polynom und gib dann die Liste der Elemente an. Bestimme außerdem ein primitives Element γ für die jeweilige multiplikative Gruppe und schreibe alle Elemente des Körpers als Potenzen von γ.