

Endliche Körper und Codierung

Übung, LVA 405.351

C. Fuchs

4. Übungsblatt, WS 2020/21

05.11.2020

1. Zeige, dass für jedes $n \geq 1$ das Produkt aller normierten irreduziblen Polynome über \mathbb{Z}_p deren Grad n teilt, gleich $x^{p^n} - x$ ist.
2. Sei $I_p(n)$ die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad n über \mathbb{Z}_p . Zeige, dass

$$p^n = \sum_{d|n} dI_p(d)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Die Möbius-Funktion auf \mathbb{N} ist definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ (-1)^k & \text{falls } n \text{ ein Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen ist,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei ist.} \end{cases}$$

Seien h und H Abbildungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} . Zeige, dass

$$H(n) = \sum_{d|n} h(d) \iff h(n) = \sum_{d|n} \mu(d)H\left(\frac{n}{d}\right)$$

jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ (Möbius'sche Inversionsformel).

4. Zeige mit Hilfe der Möbius'schen Inversionsformel, dass

$$I_p(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)p^{\frac{n}{d}}$$

gilt und folgere daraus, daß zum jedem $n \geq 1$ stets ein irreduzibles Polynom über \mathbb{Z}_p vom Grad n existiert.