Einführung in das Mathematikstudium und dessen Umfeld (Unterrichtsfach)

LVA 405.700

C. Fuchs, K. Fuchs, C. Karolus

Wiederholung Schulstoff II WS 2018/19

4 Die komplexen Zahlen

Wie wir bereits im ersten Teil bemerkt haben, sind in den reellen Zahlen quadratische Gleichungen nicht immer lösbar. Als Standardbeispiel betrachte man etwa die Gleichung

$$x^2 = -1, \tag{1}$$

welche offenbar keine reelle Lösung besitzt. Durch Einführung des Elementes

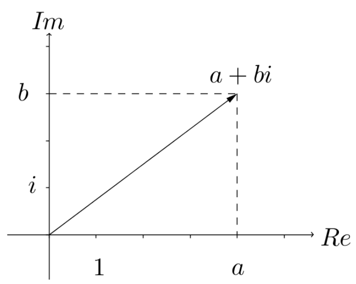
$$i := \sqrt{-1}$$

(i ist also eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$) und *Adjunktion* zu den reellen Zahlen erhält man die komplexen Zahlen,

$$\mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Das Element i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Es heißt $\mathrm{Re}(z) := a$ der *Realteil* und $\mathrm{Im}(z) := b$ der *Imaginärteil* der Zahl $z = a + bi$. Das Element $\overline{z} = a - bi$ wird das zu z *konjugiert-komplexe* Element genannt. Elemente in $\mathbb{C}$ mit Realteil $a = 0$ heißen *rein-imaginär*. Hingegen werden Elemente der Form $z = a + 0 \cdot i$ mit der reellen Zahl a identifiziert. Damit ist $\mathbb{R}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen kann man graphisch darstellen, indem man $z = a + ib$ mit dem Paar (a, b) identifiziert und dieses in einem Koordinatensystem einzeichnet, wobei auf der Abszisse der Realteil und auf der Ordinate der Imaginärteil abgelesen wird. Dieses Koordinatensystem wird gemeinhin als *Gaußsche Zahlenebene* bezeichnet. Ensprechend heißt die Abszisse *Realachse*, die Ordinate *Imaginärachse*.



Für komplexe Zahlen $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, ist die Betragsfunktion definiert durch

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Betrag von z gibt also den Abstand von z vom Ursprung an (vgl. die geometrische Darstellung). Wie auch in den rellen Zahlen, gilt für den Betrag komplexer Zahlen $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$, denn mit $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
|z_1||z_2| &= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= |z_1 z_2|.
\end{aligned}$$

Grundrechenoperationen in $\mathbb{C}$

Addition und Multiplikation sind in $\mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
+ :\ & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i, \\
\cdot :\ & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen ergeben gemeinsam mit der so definierten Addition und Multiplikation einen Körper. Für die Subtraktion gilt

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

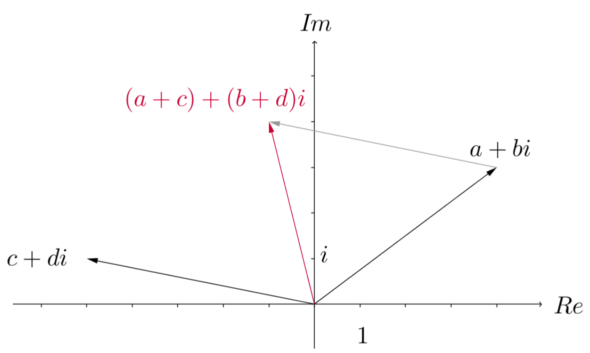
Den Quotient zweier komplexer Zahlen $a+bi$ und $c+di$, $(c, d) \neq (0, 0)$, erhält man mittels „Reell-machen des Nenners“,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + db}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Dabei wird der Bruch mit dem zu $x = c + di$ *konjugiert-komplexen Element* $\bar{x} = c - di$ erweitert.

Bem. 4.1. Die Definition der Multiplikation ergibt sich in natürlicher Weise aus der Forderung, dass in $\mathbb{C}$ Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz gelten sollen.

Die Addition komplexer Zahlen kann man (wie in der Vektorrechnung) geometrisch interpretieren als „Aneinanderhängen der Pfeile“.

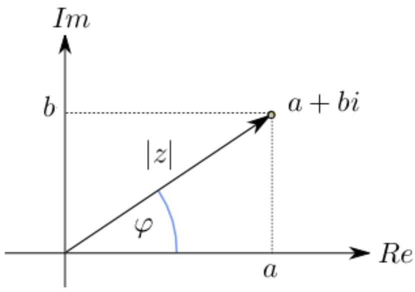


Bsp. 4.2. Es sei $x = -2 + 7i$, $y = 2 + i$. Man berechne $x + y$, $y - x$, xy und y/x.

$$\begin{aligned} x + y &= (-2 + 7i) + (2 + i) = 0 + 8i = 8i, \\ y - x &= (2 + i) - (-2 + 7i) = 4 - 6i, \\ x \cdot y &= (-2 + 7i) \cdot (2 + i) = (-4 - 7) + (-2 + 14)i = -11 + 12i, \\ \frac{y}{x} &= \frac{2 + i}{-2 + 7i} = \frac{(2 + i)(-2 - 7i)}{(-2 + 7i)(-2 - 7i)} = \frac{3}{53} + \frac{-16}{53}i. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen in Polardarstellung

Neben der Darstellung komplexer Zahlen durch kartesische Koordinaten, also in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (wofür man auch kurz (a, b) schreiben kann), kann man auch die Darstellung in *Polarkoordinaten* verwenden. Anstelle von Real- und Imaginärteil wird die Zahl dabei durch ihren Betrag $|z|$ und ihren *Phasenwinkel* $\varphi \in [0°, 360°)$ (ausgehend von der positiven Realachse und entgegen dem Uhrzeigersinn) angegeben. Dieser Winkel wird auch als das *Argument* von z bezeichnet und auch mit $\arg(z)$ notiert.



Für die Umrechung gilt:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} \quad (\varphi \text{ ist im richtigen Quadranten zu wählen}).$$

Die Darstellung kann nun entweder durch Angaben des Paares $(|z||\varphi)$ erfolgen oder gleichbedeutend durch

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Umgekehrt erhält man die kartesische Darstellung $z = a + ib$ aus der Polardarstellung $z = (|z||\varphi)$ mittels

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\varphi, \\ b &= |z|\sin\varphi. \end{aligned}$$

Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung

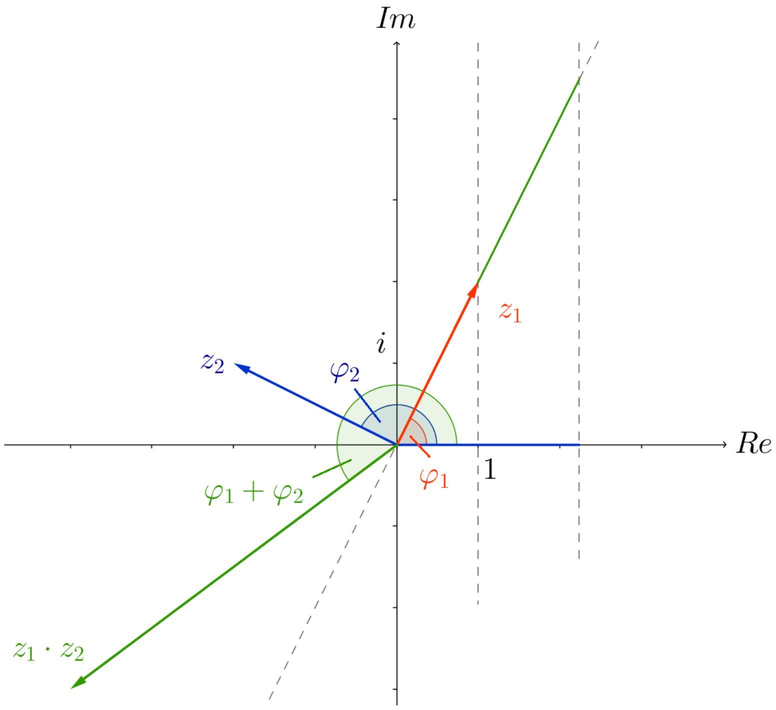
Für die Multiplikation komplexer Zahlen in Polarform ergibt sich

$$|z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi) = |z_1||z_2|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Dies lässt sich leicht mithilfe der Additionstheoreme herleiten:

$$\begin{aligned}
&|z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|z_2|(\cos\psi + i\sin\psi) = \\
&\qquad =|z_1z_2|((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi)) \\
&\qquad =|z_1z_2|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).
\end{aligned}$$

Damit lässt sich auch die Multiplikation komplexer Zahlen graphisch interpretieren. Offenbar ist dann der Betrag des Produktes gegeben durch das Produkt der einzelnen Beträge; der Winkel ergibt sich aus der Summe der Winkel. (Man beachte, dass man den Betrag von $z_1 \cdot z_2$ über den Strahlensatz konstruieren kann.)



Bsp. 4.3. Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Wir möchten z in Polarkoordinaten angeben. Aus der Formel $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und da z im ersten Quadranten liegt, erhalten wir den Winkel $\varphi = 30°$. Den Betrag berechnen wir aus $|z| = \sqrt{4\cdot 3 + 4} = 4$. Also ist z in Polarkoordinaten gegeben durch $z = (4|30°)$.

Bsp. 4.4. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit den Polarkoordinaten $r = \sqrt{3}$ und $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ (Bogenmaß). Wir wollen z in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen. Es ist

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potenzieren und Wurzelziehen von komplexen Zahlen

Es gilt die *Eulersche Formel*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

(man kann dies über Reihenentwicklungen von $\exp x$, $\sin x$ und $\cos x$ herleiten), wodurch auch die komplexe Exponentialfunktion definiert ist. Als wichtige Folgerung ergibt sich (warum?) daraus die *Formel von Moivre*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Für den Winkel $\varphi = \pi$ erhält man die *Eulersche Identität* $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Bsp. 4.5. Man drücke $\sin(3\varphi)$ mittels der Formel von Moivre durch $\sin(\varphi)$ aus.
Aus der Formel von Moivre erhalten wir

$$\begin{aligned}
\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) &= (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^3\\
&= \cos(\varphi)^3 + 3\cos(\varphi)^2(i\sin(\varphi)) + 3\cos(\varphi)(i\sin(\varphi))^2 + (i\sin(\varphi))^3\\
&= \cos(\varphi)^3 + 3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)i - 3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2 - i\sin(\varphi)^3\\
&= (\cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2) + i(3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3).
\end{aligned}$$

Indem man die Imaginärteile der linken und der rechten Seite der Gleichung miteinander vergleicht erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(3\varphi) &= 3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3\\
&= 3(1 - \sin(\varphi)^2)\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3\\
&= 3\sin(\varphi) - 3\sin(\varphi)^3 - \sin(\varphi)^3\\
&= 3\sin(\varphi) - 4\sin(\varphi)^3.
\end{aligned}$$

Aus der Formel von Moivre folgt allgemein für die n-ten Potenzen und n-ten Wurzeln von $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\begin{aligned}
z^n &= |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),\\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \quad \text{ist \underline{eine} } n\text{-te Wurzel von } z.
\end{aligned}$$

Nachdem für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $z = |z|(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$ eine Darstellung von z ist und andererseits die Gleichung $x^n = z$ höchstens n verschiedene Lösungen besitzen kann (vgl. dazu den *Hauptsatz der Algebra* weiter unten), gilt genauer:

<u>Alle</u> Lösungen der Gleichung $x^n = z$ (d.h. alle n-ten Wurzeln von z) sind gegeben durch

$$\xi_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

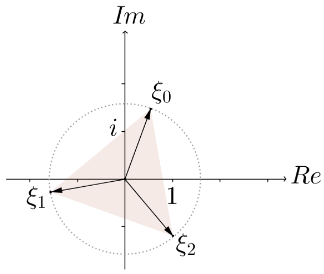
im Bogenmaß, bzw. im Gradmaß durch

$$\xi_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Insbesondere hat also jede komplexe Zahl genau n verschiedene n-te Wurzeln. Diese bilden zusammen die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

Bsp. 4.6. Man berechne $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}-2i}$. Dazu setzen wir $z = -2\sqrt{3}-2i$. Dann erhalten wir $|z| = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$ und $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\varphi = 210°$ (denn z liegt im dritten Quadranten). Es ergeben sich also mit $210°/3 = 70°$ und $360°/3 = 120°$ die drei dritten Wurzeln

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \sqrt[3]{4}(\cos 70° + i \sin 70°),\\
\xi_1 &= \sqrt[3]{4}(\cos 190° + i \sin 190°),\\
\xi_2 &= \sqrt[3]{4}(\cos 310° + i \sin 310°).
\end{aligned}$$



Durch die Formel von Moivre lassen sich leicht Potenzen einer komplexen Zahl bestimmen. Man kann dies aber natürlich für $z = a+bi$ auch durch sukzessives Ausmultiplizieren, bzw. schneller als dies, mit dem binomischen Lehrsatz machen. Zur Erinnerung: der binomische Lehrsatz besagt, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich dabei entweder mithilfe der Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-l)!}$$

berechnen oder (für kleine Werte) aus dem Pascalschen Dreieck ablesen.

Bsp. 4.7. Man bestimme $(1+i)^6$ einerseits mit dem binomischen Lehrsatz und andererseits mithilfe der Formel von Moivre. Aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}
(i+1)^6 &= \binom{6}{0}i^0 + \binom{6}{1}i^1 + \binom{6}{2}i^2 + \binom{6}{3}i^3 + \binom{6}{4}i^4 + \binom{6}{5}i^5 + \binom{6}{6}i^6\\
&= 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6\\
&= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1\\
&= -8i.
\end{aligned}$$

Um die Formel von Moivre anwenden zu können, schreiben wir zunächst $z = i+1$ in Polarschreibweise an: $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$. Damit können wir z^6 berechnen:

$$z^6 = \sqrt{2}^6 \left(\cos\left(6\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(6\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8i(-1) = -8i.$$

An dieser Stelle wollen wir noch einen speziellen Typ von Wurzeln komplexer Zahlen besprechen:

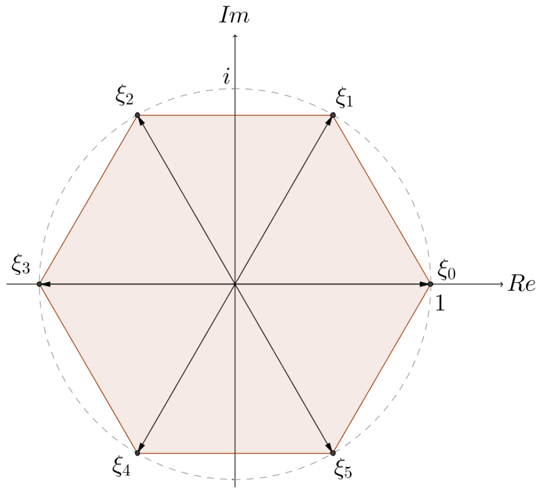
Def. 4.8. Eine Lösung $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^n = 1$ heißt *n-te Einheitswurzel*. Eine n-te Einheitswurzel z heißt *primitiv*, falls $z^m \neq 1$ für jedes $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bsp. 4.9. Wir berechnen alle sechsten Einheitswurzeln. Es ist die Gleichung $x^6 = 1$ zu lösen. Offenbar ist $z = 1$ darstellbar als $z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Somit sind alle Lösungen der Gleichung gegeben durch

$$\xi_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{6}\right)\right), \ k = 0, \dots, 5.$$

Wir schreiben die Winkel in den Lösungen im Gradmaß an (natürlich könnten wir auch beim Bogenmaß bleiben). Wegen $2\pi/6 = \pi/3 = 60°$ folgt also

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \cos(0°) + i\sin(0°) = 1,\\
\xi_1 &= \cos(60°) + i\sin(60°) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\xi_2 &= \cos(120°) + i\sin(120°) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\xi_3 &= \cos(180°) + i\sin(180°) = -1,\\
\xi_4 &= \cos(240°) + i\sin(240°) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\xi_5 &= \cos(300°) + i\sin(300°) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$



Im Allgemeinen sind alle n-ten Einheitswurzlen gegeben durch

$$\xi_k = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \ k = 0, \dots, n-1.$$

Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

In den komplexen Zahlen können wir nun jede quadratische Gleichung lösen, denn hier können wir auch von negativen Zahlen stets die Wurzel ziehen. Die Lösungen (reell wie nicht-reell) können in gewohnter Weise über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen gewonnen werden.

Bsp. 4.10. Zu lösen ist die Gleichung $2x^2 + 3x + 5 = 0$. Hier ist die Diskriminante $D = -31$ negativ und die Gleichung hat somit keine reellen Lösungen. In $\mathbb{C}$ bestimmen wir die Lösungen durch

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{31} \cdot \sqrt{-1}}{4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4} i.$$

Bemerkenswerterweise ist im Körper der komplexen Zahlen nicht nur jede quadratische Gleichung stets lösbar, sondern sogar jede Gleichung der Form $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$. Es liegen sogar alle Lösungen solch einer Gleichung in $\mathbb{C}$ (man sagt, $\mathbb{C}$ ist *algebraisch abgeschlossen*). Es gilt der folgende Satz:

Satz 4.11 (Hauptsatz der Algebra)**.** *Es sei* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ *ein Polynom* n*-ten Grades mit komplexen Koeffizienten. Dann hat* f *mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Eine äquivalente Formulierung des obigen Satzes lautet: Jedes komplexe Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (gezählt mit Vielfachheiten).

Aufgaben

1. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, welche keine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt. Begründen Sie!

2. Es seien $z = 2 - i$, $w = -1 + 2i$. Berechnen Sie $z + w$, $z \cdot w$, z^{-1}, z/w, $|z|$, $z^2 - 3z + w$.

3. Es seien $z = 1 - i$, $w = -2 + 4i$, $u = \sqrt{3} - 2i$. Bestimmen Sie $(z + w)^2$, $w - \overline{u}$, $|w + u|$, $z + u - w^2$, $\mathrm{Re}(z + u - w^2)$, $\mathrm{Im}(z + u - w^2)$, $\overline{z + u - w^2}$.

4. Lösen Sie die Gleichung $5x^2 - 6x + 11 = 0$ über $\mathbb{C}$.

5. Stellen Sie in Polarform dar: $2\sqrt{3} + 2i$, $3i^3$, $-5 - 12i$.

6. Stellen Sie in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ dar:

   (a) $5 \cdot (\cos 315° + i \sin 315°)$,

   (b) $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

7. Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{11})$ eine Lösung der Gleichung $\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 1 = 0$ ist. Wie lautet die zweite Lösung?

8. Geben Sie eine Formel für i^n, $n \in \mathbb{N}$, an und beweisen Sie deren Gültigkeit.

9. Bestimmen sie das Produkt von $z = (1.5|45°)$ und $u = (2|75°)$ in Polarform und veranschaulichen sie dies in der Gaußschen Zahlenebene.

10. Visualisieren Sie jene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die den angegebenen Bedingungen genügen:

    (a) $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$,

    (b) $|\mathrm{Re}(z)| \cdot |\mathrm{Im}(z)| = 1$,

    (c) $|z| > 2$ und $|z - 1| \leq 3$.

11. Drücken Sie mit der Formel von Moivre $\cos(4\varphi)$ nur durch Potenzen von $\cos\varphi$ aus.

12. Bestimmen sie alle fünften Einheitswurzeln und veranschaulichen Sie diese graphisch.

13. Berechnen Sie $(1+i)^{10}$ einerseits mit der Formel von Moivre und andererseits mithilfe des binomischen Lehrsatzes.

14. Lösen Sie die Gleichung $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

15. Lösen Sie die Gleichung $|z| + z = 2 + i$ für $z \in \mathbb{C}$.

16. Für Ambitionierte: Es sei ϵ eine primitive n-te Einheitswurzel. Man bestimme

    (a) $\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k$,

    (b) $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\epsilon^k$.

17. Ebenfalls: Man berechne $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$ (wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$ ist), indem man $(1+i)^n$ auf zwei Arten beschreibt: mithilfe des binomischen Lehrsatzes und mit der Formel von Moivre.