Einführung in das Mathematikstudium und dessen Umfeld (Unterrichtsfach)

LVA 405.700

C. Fuchs, K. Fuchs, C. Karolus

Wiederholung Schulstoff I WS 2018/19

1 Mengen und Zahlenbereiche

Georg Cantor: „Eine Menge ist eine Zusamenfassung wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen."

Die Objekte, welche in einer Menge zusammengefasst werden, nennt man *Elemente* der Menge.
Notation: $a \in A \dots a$ ist Element der Menge A.
$a \notin A \dots a$ ist nicht Element der Menge A.

Menge ohne Elemente: $\emptyset = \{\}$ (*leere Menge*).

Mengen können unterschiedlich beschrieben werden:

- durch Aufzählung (die Reihenfolge ist dabei unerheblich):
  $A = \{2, 4, 6, 8\} = \{6, 2, 8, 4\}$.
- durch Angabe definierender Eigenschaften:
  $A = \{$Bücher der Bibliothek, die zwischen 1990 und 1995 erschienen sind$\}$.

Beziehungen zwischen Mengen

Inklusion: $A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; (\forall a)(a \in A \to a \in B)$ (A ist *Teilmenge* von B).
Gleichheit von Mengen: $A = B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
Echte Teilmenge: $A \subset B \;:\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; (\exists a)(a \in B \wedge a \notin A)$.
Disjunkte Mengen: $A \cap B = \emptyset$ (A und B haben keine Elemente gemein).

Operationen von Mengen

Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
Durchschnitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Differenz: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
Symmetrische Differenz: $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
Komplementbildung (bezüglich G): $A^c = \{x \in G \mid x \notin A\}$.
Produktmenge: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ (Elemente sind *geordnete Paare*).
Menge geordneter n-tupel: $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\; i = 1, \ldots, n\}$.

Venn-Diagramme und Elementtafeln

Zur grafischen Veranschaulichung von Beziehungen zwischen Mengen können *Venn-Diagramme* herangezogen werden.

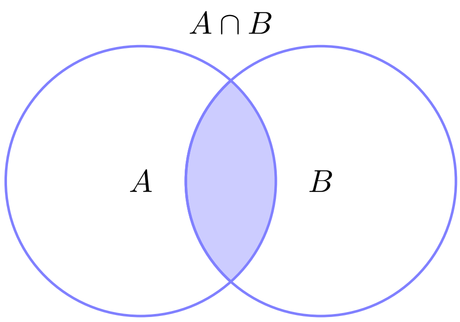


Abbildung 1: Venn-Diagramm

Einfache Zusammenhänge kann man mit *Elementtafeln* beweisen. Möchte man zum Beispiel zeigen, dass $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ gilt, so sieht das folgendermaßen aus:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

Offenbar ist ein Element stets in $(A \cup B)^c$, wenn es in $A^c \cap B^c$ ist und umgekehrt, also ist die Aussage korrekt.

Die natürlichen Zahlen

Naiv gesprochen werden die „Zahlen des Abzählens“, also $1, 2, 3, 4, \ldots$ als *natürliche Zahlen* bezeichnet. Die Menge der natürlichen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Nimmt man noch die Zahl 0 hinzu, so schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Bemerkung: Formal werden die natürlichen Zahlen üblicherweise durch die sogenannten Peano-Axiome implizit festgelegt. Ein mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen wurde durch John von Neumann angegeben.

Die ganzen Zahlen

Innerhalb der natürlichen Zahlen besitzen Gleichungen der Form $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, nicht immer eine Lösung (man betrachte etwa die Gleichung $5 + x = 4$). Um auch stets

Differenzen $x = b - a$ zuzulassen, werden die natürlichen Zahlen um die negativen ganzen Zahlen erweitert (in den ganzen Zahlen hat dann jedes Element ein *additives Inverses*). Die Menge der *ganzen Zahlen* wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Bemerkung: Formal definiert man eine passende Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen, deren Äquivalenzklassen mit den ganzen Zahlen identifiziert werden.

Die rationalen Zahlen

Um wiederum eine Lösung von Gleichungen der Form $a = bx$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, zu gewährleisten, werden „Brüche" $x = \frac{a}{b}$ eingeführt. Dadurch erhält man die *rationalen Zahlen*, deren Gesamtheit gegeben ist durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Damit erhält man den kleinsten Bereich, in dem die vier Grundrechnungsarten uneingeschränkt ausgeführt werden können (man sagt, $\mathbb{Q}$ ist ein *Körper*). Neben einem eindeutigen additiven Inversen hat darin auch jedes Element außer der Null ein *multiplikatives Inverses*.

Die reellen Zahlen

Betrachtet man etwa die Gleichung $x^2 = 2$, so sieht man, dass diese keine Lösung in den rationalen Zahlen besitzt: durch einen indirekten Beweis lässt sich leicht zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Man kann $\sqrt{2}$ aber beliebig genau durch rationale Zahlen annähern. Erweitert man die rationalen Zahlen um all jene Zahlen, welche beliebig genau durch rationale Zahlen approximierbar sind, so erhält man die reellen Zahlen. Damit werden sozusagen die Lücken (die irrationalen Zahlen) in der Zahlengerade aufgefüllt. Jede reelle Zahl kann als Dezimalzahl der Form

$$a_k a_{k-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots$$

mit Ziffern $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und unendlich vielen Nachkommastellen geschrieben werden. Die rationalen Zahlen sind genau jene reellen Zahlen, deren Nachkommastellen sich ab einer gewissen Stelle periodisch wiederholen.
Die Menge der reellen Zahlen zerfällt in die Menge der rationalen Zahlen und in die Menge der *irrationalen Zahlen*. Beispiele für irrationale Zahlen sind $\sqrt{3}, \pi$ oder e (*Eulersche Konstante*).

Die reellen Zahlen haben die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie total geordnet sind. Man kann sie sich als Punkte auf einer Zahlengerade verdeutlichen, wobei die Zahlen weiter links am Zahlenstrahl „kleiner" sind als jene, die weiter rechts liegen. Man schreibt $a < b$ (bzw. $a \leq b$) für „a ist kleiner als b" (bzw. „a ist kleiner als oder gleich b") und ebenso $a > b$ (bzw. $a \geq b$) für „a ist größer als b" (bzw. „a ist größer oder gleich b").

Für eine reelle Zahl x ist der *Absolutbetrag* von x definiert als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Der Absolutbetrag $|x|$ gibt den Abstand von x zum Ursprung an. Es gelten die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&|xy| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0), \quad \sqrt{x^2} = |x|, \\
&|x \pm y| \leq |x| + |y| \ \text{(Dreiecksungleichung)}, \\
&|x \pm y| \geq ||x| - |y|| \ \text{(umgekehrte Dreiecksungleichung)}, \\
&|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a \quad (a > 0).
\end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen

Auch über $\mathbb{R}$ sind nicht alle algebraischen Gleichungen lösbar. Nachdem das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist, hat zum Beispiel die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$. Erweitert man die reellen Zahlen um die *imaginäre Einheit* $i = \sqrt{-1}$ (d.h. um eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$) und definiert

$$\mathbb{C} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

so erhält man die Menge der *komplexen Zahlen*, die wir später noch genauer besprechen werden.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Inklusionskette:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Aufgaben

1. Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:
   (a) $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{-6, -3, -1, 7, 19\}) \cup \{x \in \mathbb{N} : \ 10 \leq x \leq 12\}$.
   (b) $A \Delta B$, wobei $A = \{1, 4, 5, 8, 17\}$, $B = \{2, 4, 5, 9, 17\}$.
   (c) $A \times B$, wobei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$.
2. Beweisen oder widerlegen Sie: $(A \Delta B)^c = A^c \Delta B^c$.
3. Beweisen oder widerlegen Sie: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2 Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Terme

Salopp gesagt, ist ein *Term* ein mathematischer Ausdruck, welcher sich in in sinnvoller Weise aus Zahlen, Variablen, Verknüpfungen und Klammern zusammensetzt, wie zum Beispiel

$$3x^2 - \frac{y-7}{(x+3z)^2} - (x+y).$$

Spezielle Terme sind *Monome* und *Binome*. Ein Monom ist ein Term, der nur aus einem Glied besteht. Monome sind also Produkte von Koeffizienten und Potenzen von Variablen. Ein Binom ist eine Summe oder Differenz zweier Monome.

$$\begin{aligned} 3x^5 \quad & \text{ist ein Monom.} \\ 4xy - z^2 \quad & \text{ist ein Binom.} \end{aligned}$$

Für Variablen kann man Werte aus der *Definitionsmenge* einsetzen. Arbeitet man etwa über der Grundmenge der reellen Zahlen, so ist die größtmögliche Definitionsmenge für $\frac{1}{x+2}$ gleich $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

2.2 Gleichungen

Eine *Gleichung* ist ein mathematischer Ausdruck, bestehend aus zwei Termen, welche durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. Beispiele von Gleichungen sind

$$x^2 - 3x - 5 = 10 - x, \tag{1}$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2, \tag{2}$$

$$x^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

Die Gleichung (1) ist für manche Werte $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Gleichung (2) ist sogar für jedes Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Man nennt so eine Gleichung eine *Identität*. Hingegen gibt es kein $x \in \mathbb{R}$, sodass (3) erfüllt ist.

Unter der *Lösungsmenge* einer Gleichung versteht man die Teilmenge jener Werte aus dem Definitionsbereich, für welche die Gleichung erfüllt ist. So ist die Lösungsmenge von (1) gleich $L_1 = \{-3, 5\}$, jene von (2) gleich $L_2 = \mathbb{R}$ und die von (3) gleich $L_3 = \emptyset$.

Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, werden Umformungen durchgeführt. Dabei ist darauf zu achten, ob es sich um eine *Äquivalenzumformung* handelt oder nicht. Dies sind solche Umformungen, bei denen die Lösungsmenge sich nicht ändert. Das Addieren und Subtrahieren beliebiger Terme sowie das Multiplizieren oder Dividieren mit bzw. durch Terme ungleich Null sind Äquivalenzumformungen. Hingegen sind das Quadrieren oder Wurzelziehen keine Äquivalenzumformungen.

Bsp. 2.1. Wegen $x^2 = (-x)^2$ ist beim Wurzelziehen auf die verschiedenen Möglichkeiten für das Vorzeichen zu achten. Man betrachte etwa die Gleichung

$$(x-8)^2 = (x+4)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm(x-8) = \pm(x+4).$$

Nun genügt es, die Fälle $x - 8 = x + 4$ und $x - 8 = -(x + 4)$ zu untersuchen (die anderen Möglichkeiten für das Vorzeichen sind äquivalent). Offenbar hat die erste Gleichung keine Lösung und $x = 2$ ist die einzige Lösung der zweiten Gleichung. Damit ist die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung gegeben durch $L = \emptyset \cup \{2\} = \{2\}$.

Bei Umformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind, kann es auch passieren, dass man „Lösungskandidaten“ erhält, die die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen und daher verworfen werden müssen.

Bsp. 2.2. Gegeben ist die Gleichung $2\sqrt{x-1} = 1 - x$. Quadrieren liefert

$$\begin{aligned}4(x-1) &= (1-x)^2\\ 4x - 4 &= 1 - 2x + x^2\\ 0 &= x^2 - 6x + 5.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. Es ist x_1 eine Lösung der ursprünglichen Gleichung, x_2 jedoch nicht.

2.2.1 Polynomielle Gleichungen (in einer Variable)

Def. 2.3. Ein *Polynom* (in einer Variable) ist ein Term der Gestalt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n$ konstant und $n \neq 0$ sind. Man nennt n den *Grad* des Polynomes und $a_0, \ldots, a_n$ die *Koeffizienten*. Zudem heißt a_n der *Leitkoeffizient* und $a_n x^n$ der *Leitterm*.
0 ist das *Nullpolynom*; sein Grad ist als $-\infty$ defniert. Polynome vom Grad 1 heißen *linear*, vom Grad 2 *quadratisch*, vom Grad 3 *kubisch* und vom Grad 4 *quartisch*.

Polynome kann man an Stellen des Definitionsbereiches *auswerten*, indem man für x den jeweiligen Wert einsetzt. Zum Beispiel hat das Polynom $x^3 - 2x + 1$ an der Stelle $x = 3$ den Wert 22.

Die Summe zweier Polynome ist folgenderweise definiert:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) + (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i,$$

wobei wir $a_i := 0$ und $b_j := 0$ für $i > n$ und $j > m$ setzen. Die Schreibweise mit dem *Summenzeichen* Σ steht dabei kurz für

$$\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_{n+m} + b_{n+m}) x^{n+m}.$$

Ebenso ist das Produkt zweier Polynome definiert als

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0) \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0) = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) x^k,$$

wobei wir $a_i := 0$ und $b_j := 0$ für $i > n$ und $j > m$ setzen.

Def. 2.4. Eine *polynomielle Gleichung* ist eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \tag{4}$$

Die Lösungen der Gleichung heißen *Nullstellen* (oder *Wurzeln*) des Polynomes auf der linken Seite. Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Wir hätten polynomielle Gleichungen natürlich auch als Gleichungen der Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$ definieren können. Es stellt sich die Frage, ob und wie man alle Lösungen einer polynomiellen Gleichung finden kann.

Die Lineare Gleichung

$$ax + b = 0, \; a, b \in \mathbb{R},$$

hat die Lösung $x = -\frac{b}{a}$. Dies ist die einzige Lösung der Gleichung in $\mathbb{R}$.

Die Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

hat höchstens zwei reelle Lösungen. Diese sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Man nennt $D = b^2 - 4ac$ die *Diskriminante* der Gleichung (5). Es gilt:

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{(5) hat genau zwei verschiedene reelle Lösungen,} \\ D = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{(5) hat genau eine reelle Lösung (mit Vielfachheit 2),} \\ D < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{(5) hat keine reellen Lösungen.} \end{aligned}$$

Alternativ kann man jede Gleichung der Form (5) auf die Gestalt

$$x^2 + px + q = 0, \; p, q \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

umformen, deren Lösungen man mit der Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

berechnen kann. Analog zur ersten Version gibt die Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ Auskunft über die Anzahl der reellen Lösungen von (6).

Satz 2.5 (Satz von Vietá)**.** *Sind x_1, x_2 die beiden Lösungen der Gleichung $x^2+px+q = 0$, so gilt*

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \quad \textit{und} \quad \begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2), \\ q &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Gleichungen höheren Grades

Für polynomielle Gleichungen höheren Grades (also ab Grad 3), ist die Berechnung der Lösungen im Allgemeinen nicht mehr so einfach. Für kubische und quartische Gleichungen gibt es Lösungsformeln, welche auf Cardano (1545) und Ferrari zurückgehen. Da diese jedoch relativ unhandlich sind, werden sie heute im Schulunterricht nicht mehr gelehrt. Für Gleichungen fünften und höheren Grades ist dies im Allgemeinen unmöglich (Abel 1824). In gewissen Situationen gibt es dennoch Methoden, Gleichungen höheren Grades exakt zu lösen. Dabei versucht man üblicherweise, die zu lösende Gleichung auf Gleichungen niedrigeren Grades zurückzuführen. Einige Ansätze dazu sollen hier noch kurz erwähnt werden.

Die Biquadratische Gleichung

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{R},$$

lässt sich durch die Substitution $u = x^2$ auf die Lösung von $au^2 + bu + c = 0$ zurückführen. Sind u_1, u_2 die Lösungen der neuen Gleichung, so erhält man die Lösungen der ersten durch Rücksubstituieren (sofern $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_0^+$): $x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2}$.

Bsp. 2.6. Zu lösen ist die Gleichung $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Die Substitution $u = x^2$ führt auf die Gleichung $u^2 - 13u + 36 = 0$. Deren Lösungen sind $u_1 = 4$ und $u_2 = 9$. Rücksubstitution ergibt die vier Lösungen der ursprünglichen Gleichung: $x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} = \pm 2$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2} = \pm 3$.
Man beachte: liefert die neue Gleichung eine negative Lösung u, so ist (zumindest in $\mathbb{R}$) die Wurzel nicht definiert und man erhält daraus keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung. So hat etwa die Gleichung $x^4 - 5x^2 - 36$ nur zwei reelle Lösungen, $x_{1,2} = \pm 3$.

Faktorisieren und Nullproduktsatz

Eine günstige Situation liegt vor, wenn man das Polynom in der Gleichung (4) in ein Produkt zweier (oder mehr) Polynome niedrigeren Grades zerlegen kann, denn es gilt der *Nullproduktsatz*: In $\mathbb{R}$ ist das Produkt zweier Faktoren genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist (man sagt, $\mathbb{R}$ ist *nullteilerfrei*). Damit kann man das Bestimmen der Lösungen auf das Lösen von polynomiellen Gleichungen mit niedrigerem Grad zurückführen.

Bsp. 2.7. Die Gleichung $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$ ist zu lösen. Dies ist äquivalent mit $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 2x - 3) = 0$. Die Lösungsmenge ist die Vereinigung der Lösungsmenge von $x^2 - 4x + 4 = 0$ und jener von $x^2 + 2x - 3 = 0$. So erhält man die Lösungsmenge $L = \{1, 2, -3\}$.

Doch wie findet man so eine Faktorisierung? Das ist im Allgemeinen nicht so einfach (tatsächlich ist ja gerade die Zerlegung in *Linearfaktoren*, d.h. in Faktoren der Form $x - x_i$, gleichbedeutend mit der Bestimmung der Lösungen). Kennt man jedoch bereits eine oder mehrere Lösungen einer Gleichung, so kann man die entsprechenden Linearfaktoren (oder gleich ihr Produkt) mittels einer Polynomdivision abspalten.

Bsp. 2.8. Angenommen, wir kennen bereits die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ der Gleichung aus Beispiel 2.7. Es ist $(x-1)(x-(-3)) = (x^2+2x-3)$. Wir möchten diesen Faktor von unserem Polynom abspalten und machen dafür eine Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12\big) : \big(x^2 + 2x - 3\big) = x^2 - 4x + 4 \\
\underline{-\,x^4 - 2x^3 + 3x^2} \\
\qquad\; -\,4x^3 - 4x^2 + 20x \\
\qquad\quad \underline{4x^3 + 8x^2 - 12x} \\
\qquad\qquad\quad 4x^2 \;\; + 8x - 12 \\
\qquad\qquad\; \underline{-\,4x^2 \;\; - 8x + 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Damit haben wir die gewünschte Faktorisierung gefunden: Es ist $x^4-2x^3-7x^2+20x-12 = (x^2-4x+4)(x^2+2x-3)$ und wir können zur Bestimmung der verbleibenden Wurzeln die Gleichung $x^2-4x+4=0$ lösen.

Um in der oben beschriebenen Weise Linearfaktoren eines Polynomes abspalten zu können, muss man jedoch bereits eine Lösung kennen. Sind alle Koeffizienten rational, so kann man die Suche nach rationalen Lösungen mittels dem folgenden Satz systematisch angehen.

Satz 2.9 (Lemma von Gauß)**.** *Es sei $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und $x_1 = \frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle mit $ggT(p,q) = 1$. Dann ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n.*

Bsp. 2.10. Es sei die Gleichung $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$ zu lösen. Für jede rationale Nullstelle $x_1 = p/q$ (gekürzt) ist p Teiler von 4 und q Teiler von 1. Wir können also davon ausgehen, dass $q = 1$ ist und jede rationale Nullstelle sogar eine ganze Zahl ist, welche die Zahl 4 teilt. Dafür kommen nur die Werte $\pm1, \pm2, \pm4$ infrage. Tatsächlich ist $x_1 = -2$ eine Lösung. Durch Polynomdivision erhält man $x^3+5x^2+8x+4 = (x^2+3x+2)(x+2)$. Da $x^2+3x+2=0$ die Lösungen $x_2 = -1$ und $x_3 = -2$ besitzt, hat unsere urspüngliche Gleichung die Lösungsmengen $L = \{-1, -2\}$.

Bem. 2.11. Natürlich kann jede Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ auf eine Gleichung $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$ mit $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ umgeformt werden, indem man etwa mit dem kgV der Nenner der Koeffizienten multipliziert.

2.2.2 Lineare Gleichungssysteme in mehreren Variablen

Def. 2.12. Eine *lineare Gleichung in n Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$ über $\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Gestalt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Menge von linearen Gleichungen in einer oder mehreren Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Die *Lösungsmenge* eines solchen Systems ist die Menge aller n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, welche jede der Gleichungen erfüllen.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann entweder leer sein, aus endlich vielen oder unendlich vielen Elementen bestehen. Dies ist unmittelbar am Beispiel zweier linearer Gleichungen in zwei Variablen ersichtlich.

Bsp. 2.13. Das Gleichungssystem $\{3x - y = 4, 3x - y = -1\}$ hat offenbar keine Lösung in $\mathbb{R}^2$. Hingegen hat das System $\{3x - y = -1, y = 4 - 2x\}$ genau eine Lösung, nämlich $(3/5, 14/5)$. Das System $\{2x - y = 1, 4x - 2 = 2y\}$ hat unendlich viele Lösungen (jede Lösung der ersten Gleichung ist eine Lösung der zweiten und vice versa), nämlich $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 2x - 1\}$.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem kann mit dem *Gaußschen Eliminationsverfahren* bestimmt werden. Man betrachte dazu das folgende einfache Beispiel eines Systems zweier linearer Gleichungen in zwei Variablen.

Bsp. 2.14. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} I.\ 3y - 2x &= -1, \\ II.\ 2y &= -x + 4. \end{aligned}$$

Aus der Schule ist bekannt, wie man mittels Eliminationsverfahren die Lösungsmenge bestimmt: Man formt die Gleichungen so um, dass eine der Variablen jeweils mit gleichem Koeffizienten vorliegt und subtrahiert eine der Gleichungen von der anderen. Damit erhält man eine Gleichung, in der nur noch die andere Variable vorkommt und kann diese somit berechnen. Durch Rückeinsetzen kann man schließlich die andere Variable bestimmen. Damit erhält man eine eindeutige Lösung $L = \{(2, 1)\}$.

Dieses Verfahren hängt offenbar nur von den Koeffizienten der Gleichungen ab. Man kann die Bestimmung der Lösungen formalisieren, indem man die Koeffizienten als Einträge einer Matrix betrachtet und die Umformungen dort analog vornimmt. Beide Schreibweisen sollen hier angegeben werden:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 0x + 7y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

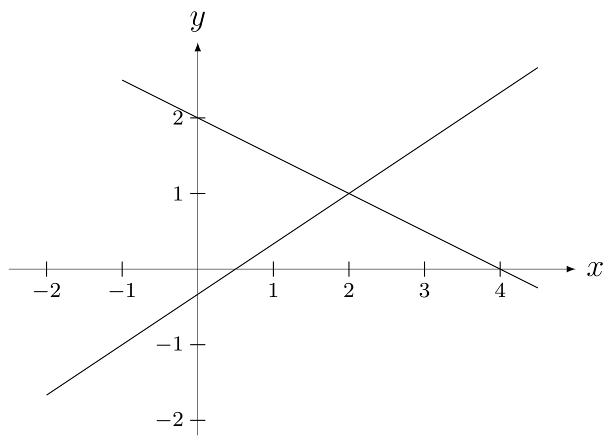
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 0x + 1y &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x + 0y &= 4 \\ 0x + 1y &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 1x + 0y &= 2 \\ 0x + 1y &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(Man kann also Zeilen mit einer Zahl multiplizieren, Zeilen addieren und subtrahieren oder vertauschen. Es ist auch erlaubt, Spalten zu vertauschen, jedoch muss man sich dabei merken, dass dabei die Reihenfolge der Variablen verändert wird. Durch diese Operationen versucht man, die Matrix auf *Diagonalform* zu bringen.) Dies sind die Grundzüge des *Gaußschen Eliminationsverfahrens*, dessen Funktionsweise man in der linearen Algebra genau kennen lernt.

Man kann sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus Bsp. 2.14 auch grafisch veranschaulichen. Die Lösungsmenge der einzelnen Gleichungen stellt jeweils eine Gerade dar, die Lösung des Systems ist genau ihr Schnittpunkt.



2.2.3 Exponentialgleichungen

Bei einer *Exponentialgleichung* steht die Variable mindestens einmal in einem Exponenten. Ein Beispiel ist etwa

$$2^{2x+1} + 4^{x-1} = 2304. \tag{7}$$

Manchmal kann man so eine Gleichung auf die Form

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a \in \mathbb{R}^+,$$

bringen. In diesem Fall folgt $f(x) = g(x)$. In der obigen Gleichung funktioniert das so:

$$\begin{aligned}
2^{2x+1} + 2^{2(x-1)} &= 2304 \\
2^{2x-2} \cdot 2^3 + 2^{2x-2} &= 2304 \\
2^{2x-2}(2^3 - 1) &= 2304 \\
2^{2x-2} &= 256 \\
2^{2x-2} &= 2^8.
\end{aligned}$$

Also folgt $2x - 2 = 8$ und man erhält die (eindeutige) Lösung $x = 5$.

Meist löst man Exponentialgleichungen, indem man Eigenschaften von Logarithmen und Rechengesetze für Potenzen ausnutzt.

Def. 2.15. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Der *Logarithmus* von b zur Basis a ist die eindeutig bestimmte Zahl x, für welche $a^x = b$ gilt. Man schreibt $x = \log_a(b)$.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^m) &= m \cdot \log_a(x)
\end{aligned}$$

Um diese Regeln anwenden zu können, muss die Gleichung freilich in passender Form vorliegen (man beachte insbesondere, dass es keine Rechenregel für Summen und Differenzen gibt).

Bsp. 2.16. Wir lösen die folgende Gleichung, indem wir logarithmieren. Offenbar ist es günstig, zur Basis 5 zu rechnen, aber wir könnten auch eine andere Basis wählen.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 3^{2x} &= 5^{3(x-1)+\log_5(2)+2\log_5(3)} \\
x\log_5(2) + 2x\log_5(3) &= (3(x-1) + \log_5(2) + 2\log_5(3))\log_5(5) \\
x(\log_5(2) + 2\log_5(3) - 3) &= \log_5(2) + 2\log_5(3) - 3 \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

Das hätte man natürlich auch anders machen können (wie?).

2.3 Ungleichungen

Eine *Ungleichung* besteht aus zwei Termen, welche durch ein Ungleichheitszeichen miteinander verbunden sind, also durch eines der folgenden Zeichen

$$< \quad \leq \quad > \quad \geq .$$

Eine Ungleichung drückt einen Größenvergleich aus, der sich (meist) auf die natürliche Anordnung der reellen Zahlen bezieht. (Das impliziert die Existenz einer *Totalordnung* auf der zugrundeliegenden Menge. Für komplexe Zahlen machen Ungleichungen keinen Sinn: $\mathbb{C}$ kann nicht strukturverträglich angeordnet werden. Natürlich kann man aber Real- und Imaginärteile sowie Beträge komplexer Zahlen durch die auf $\mathbb{R}$ gegebene Ordnungsrelation vergleichen.)

Wie bei der Behandlung von Gleichungen können auch Ungleichungen in äquivalente Ungleichungen umgeformt werden. Äquivalenzumformungen sind wiederum unter anderem

- Das Addieren oder Subtrahieren von Termen,
- Das Multiplizieren oder Dividieren mit einer Zahl ungleich Null,
- Das Bilden des Inversen bei gleichem Vorzeichen beider Seiten.

Dabei ist darauf zu achten, dass sich bei einer Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umkehrt. Dasselbe gilt für das Bilden von Inversen zweier positiver Zahlen. Dies muss auch beachtet werden, wenn Variablen im Spiel sind. In einer *Fallunterscheidung* müssen dabei alle Möglichkeiten separat untersucht werden.

Bsp. 2.17. Zu lösen ist die Ungleichung

$$\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{1}{5}.$$

Zunächst: -2 ist aus der Definitionsmenge auszuschließen, da ansonsten der Nenner verschwinden würde. Also $D = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$. Bei der Multiplikation mit dem Nenner $x+2$ muss man zwischen folgenden Fällen unterscheiden.

Fall 1: $x < -2$.
Der Nenner ist negativ, das Ungleichheitszeichen kehrt sich um und man erhält die äquivalente Ungleichung

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq \frac{1}{5}(x-2) \\ 5x - 5 &\leq x - 2 \\ 4x &\leq 3 \\ x &\leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für diesen Fall die Lösungsmenge $L_1 = \{x < -2\}$.

Fall 2: $x > -2$.
In dem Fall ist der Nenner positiv und das Ungleichheitszeichen muss nicht geändert werden. Analog zu vorhin erhält man $x \geq \frac{3}{4}$ und die Lösungsmenge

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq \frac{3}{4}\}.$$

Insgesamt ist die Menge der Lösungen gegeben durch

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ x < -2 \vee x \geq \frac{3}{4}\}.$$

2.4 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Bei der Suche nach Lösungen von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Beträgen werden zunächst die Beträge in einer Fallunterscheidung aufgelöst und auf (Un-)Gleichungen ohne Beträge umgeschrieben. Diese können sodann in gewohnter Manier umgeformt werden.

Bsp. 2.18. Es soll die Lösungsmenge (in $\mathbb{R}$) der folgenden Ungleichung bestimmt werden:

$$|x+1| + |x-1| \leq 2$$

Nach der Definition des Betrages gilt

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{falls } x < -1 \end{cases} \qquad \text{und} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Daher unterscheiden wir folgende drei Fälle:

Fall 1: $x < -1$.

$$|x+1| + |x-1| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x-1-x+1 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1.$$

Es ergibt sich $L_1 = \emptyset$.

Fall 2: $-1 \leq x < 1$.

$$|x+1| + |x-1| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+1-x+1 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq 2.$$

Es ergibt sich $L_2 = [-1; 1)$.

Fall 3: $1 \leq x$.

$$|x+1| + |x-1| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+1+x-1 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1.$$

Es ergibt sich $L_3 = \{1\}$.
Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq 1\}$.

2.5 Wichtige Identitäten und Gleichungen

Aus der Kombinatorik

Binomialkoeffizienten (Anzahl an k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung gibt der *binomische Lehrsatz*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bsp. 2.19. Wir berechnen $(x-y)^3$ mithilfe des binomischen Lehrsatzes.

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x+(-y))^3 \\ &= \binom{3}{0}x^3(-y)^0 + \binom{3}{1}x^2(-y)^1 + \binom{3}{2}x^1(-y)^2 + \binom{3}{3}x^0(-y)^3 \\ &= x^3(-y)^0 + 3x^2(-y)^1 + 3x^1(-y)^2 + x^0(-y)^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\end{aligned}$$

Auch ganz praktisch ist häufig die Identität

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Aus der Geometrie

Gleichung eines *Kreises* mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und Radius r:

$$(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$$

Gleichung einer *Ellipse* in erster Hauptlage mit Hauptachse a und Nebenachse b:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2.$$

Gleichung einer *Hyperbel* in erster Hauptlage mit Hauptachse a und Nebenachse b:

$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2.$$

Aufgaben

1. Im Jahr 2016 ist ein Vater 60 Jahre alt, seine Tochter ist 45 Jahre jünger. Vor n Jahren war der Vater n-mal so alt wie die Tochter. Wann war das?
2. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge über $\mathbb{R}$:
   (a) $\dfrac{11x-2}{2x+2} - \dfrac{3x-1}{x+3} = \dfrac{5x+15}{2x+6}$
   (b) $\dfrac{8}{x+1} = \dfrac{x-1}{x^2+14x+13}$
   (c) $\dfrac{1}{2}(-1+4,5x^2) = x^4$
3. Berechnen Sie alle reellen Wurzeln des Polynomes $25x^4 + 624x^2 - 25$.
4. Das Polynom $x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 35x^2 + 12x - 60$ hat eine rationale Nullstelle $x_0 \in [3; 10]$. Bestimmen Sie x_0 und berechnen Sie die restlichen Wurzeln durch Abspalten des Linearfaktors $(x - x_0)$.

5. Gegeben sind die Gleichungen $y + 2x = 5$ und $1 = x - y$. Zeichnen Sie die Lösungsmengen der beiden Gleichungen und bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems durch eine Rechnung.

6. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem. Versuchen Sie dies auch unter Verwendung der Matrixschreibweise.

$$\begin{aligned} &I. \quad -x + 2y + z = -2, \\ &II. \quad 3x - 8y - 2z = 4, \\ &III. \; x + 4z = -2. \end{aligned}$$

7. Lösen Sie die Gleichung $8^2 \cdot 3^{2x+1} = 9^{4+2x} - 17 \cdot 3^{2x+1}$.

8. Lösen Sie die Gleichung $2^{-x+3} \cdot 5^{2x+12} = 10^{3x+15}$.

9. Für welche reellen Zahlen gilt

$$\frac{1}{|x+2|} > \frac{1}{3x-2}?$$

10. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b$ die Ungleichungen

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$$

richtig sind. Wann wird die Voraussetzung $a \leq b$ verwendet?

11. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen für die $|x+2| \leq |2x-4|$ gilt und markieren Sie die Lösungsmenge am Zahlenstrahl.

12. Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) in der Ebene, für welche $|x| + |x+y| \leq 1$ gilt und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge.

13. Welcher Körper im Raum wird durch die folgenden Bedingungen beschrieben? $|y^2 + z^2| \leq 2$, $|x| \leq 1$.

14. Schreiben Sie die folgenden Summen mithilfe des Summenzeichens:
    (a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
    (b) $a^2 - a^4 + a^6 - a^8 + a^{10}$
    (c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{10}{1024}$

15. Berechnen Sie $(x-y)^4$ mithilfe des binomischen Lehrsatzes.

16. Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$x + y = \frac{(x+y)^2 + 25}{10}.$$

    (a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Wie viele Lösungen gibt es?
    (b) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Wie viele Lösungen gibt es?

3 Funktionen

3.1 Allgemeines

Def. 3.1. Eine *Funktion* f ist eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B, welche jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet. Man schreibt

$$f: \ A \to B, \ a \mapsto f(a).$$

Man nennt A den *Definitionsbereich*, B den *Wertebereich* der Funktion und $f(a)$ den (Funktions-) *Wert* von f an der *Stelle* a.

Funktionen können auf verschiedene Arten angegeben werden:

Explizit durch eine Funktionsvorschrift, z.B.: $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$
(anstatt $x \mapsto x^2$ könnte man auch $f(x) = x^2$ schreiben).

Implizit durch eine Gleichung, z.B.: $x^2 - 2y = 2$.

Tabellarisch, etwa $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f: A \to \mathbb{N}$,

x	$f(x)$
1	7
2	-2
3	1
4	-2

Funktionen können auch **stückweise definiert** sein, wie etwa $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{falls } x \leq -3, \\ x^2 - 1, & \text{falls } -3 < x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Wir beschäftigen uns in weiterer Folge in erster Linie mit einer speziellen Klasse von Funktionen:

Def. 3.2. Eine *reelle* (oder *reellwertige*) Funktion ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}.$$

Den Graphen einer Funktion kann man visualisieren, indem man die Elemente von Γ_f in einem Koordinantensystem plottet. (Wir werden, wenn wir von dem Funktionsgraphen einer Funktion sprechen, von so einer grafischen Darstellung sprechen.)

Verknüpfung von Funktionen

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich, so ist die Summe, die Differenz, das Produkt und (im Falle $g(x) \neq 0$) der Quotient von f und g folgendermaßen definiert:

$$f+g : D \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x)+g(x),$$
$$f-g : D \to \mathbb{R},\ (f-g)(x) = f(x)-g(x),$$
$$f+g : D \to \mathbb{R},\ (fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right) : D \to \mathbb{R},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(falls } g(x) \neq 0).$$

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to D$ zwei Funktionen, so ist die Verkettung $f \circ g$ definiert als die Funktion

$$f \circ g : D' \to \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

3.2 Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen und Pole

Def. 3.3. Es sei $f :\ D \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ eine reelle Funktion und $x_0 \in D$. Ist $f(x_0) = 0$, so nennt man x_0 eine *Nullstelle* von f.

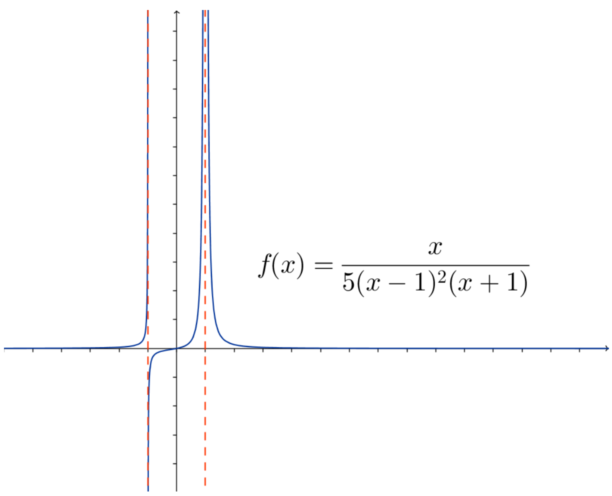
Die Nullstellen entsprechen genau denjenigen Stellen, an denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet.

Unter einer *Polstelle* (oder kurz *Pol*) einer Funktion f versteht man eine einpunktige Lücke x_0 im Definitionsbereich, für welche die Funktionswerte von f in jeder Umgebung von x_0 betragsmäßig beliebig groß werden. Sind $g, h \in \mathbb{R}[x]$ Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, so ist $f(x) = g(x)/h(x)$ eine rationale Funktion, deren Polstellen gerade die Nullstellen des Nennerpolynomes h sind.

Bsp. 3.4. Die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{5(x-1)^2(x+1)}$$

hat zwei verschiedene Polstellen, $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Bei x_2 liegt eine doppelte Polstelle vor.



Monotonie und Extrema

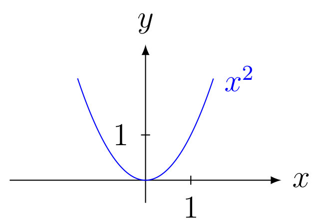
Eine Funktion ist *streng monoton steigend* auf D, wenn der Funktionswert mit wachsendem Argument immer größer wird und *monoton steigend*, wenn der Funktionswert mit wachsendem Argument nicht kleiner wird. Im Gegensatz dazu ist f *streng monoton fallend*, wenn der Funktionswert mit wachsendem Argument immer kleiner wird und *monoton fallend*, wenn er zumindest nicht größer wird. Formal definieren wir diese Begriffe folgenderweise:

Def. 3.5. Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ eine reelle Funktion. Man nennt f (*streng*) *monoton steigend* auf D, falls für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$ gilt, dass $f(x) \leq f(x')$ (bzw. $f(x) < f(x')$). Gilt für $x, x' \in D$ mit $x < x'$ stets $f(x) \geq f(x')$ (bzw. $f(x) > f(x')$), so heißt f *monoton fallend* (bzw. *streng monoton fallend*).

Bsp. 3.6. Wir untersuchen das Monotonieverhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Es sei $x < y$. Dann ist $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Nach Vorraussetzung ist der erste Faktor stets negativ. Wir betrachten nun zwei Fälle.

Fall 1: $x, y \in (-\infty; 0]$. In dem Fall ist auch $(x + y) < 0$ und somit $f(x) - f(y) > 0$, d.h. $f(x) > f(y)$. Es ist also f streng monoton fallend auf $(-\infty; 0]$.

Fall 2: $x, y \in [0; \infty)$. In dem Fall ist $(x + y) > 0$ und somit $f(x) - f(y) < 0$, d.h. $f(x) < f(y)$. Es ist also f streng monoton steigend auf $[0; \infty)$.



Bem. 3.7. Oft ist es leichter, das Monotonieverhalten mithilfe der Differentialrechnung zu untersuchen (mehr dazu später).

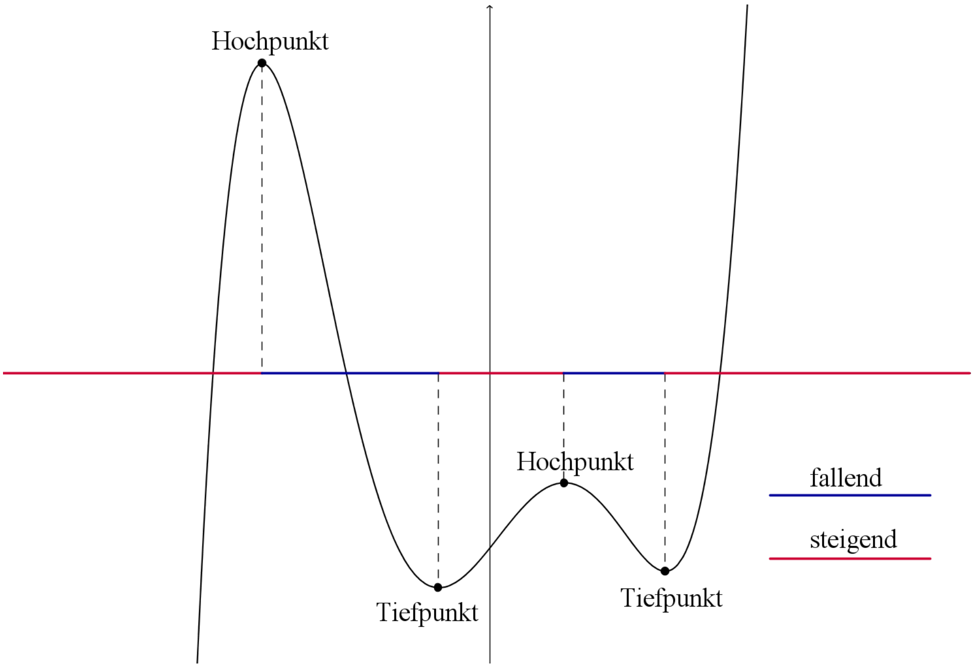
Als nächstes führen wir den Begriff eines *Minimums* bzw. *Maximums* ein. Anschaulich gespochen, ist ein Minimum ein Punkt einer Funktion, der zumindest in einer kleinen Umgebung den kleinsten Funktionswert besitzt. In beiden Fällen spricht man von einem *lokalen Extremum*. Analog dazu ist ein Maximum ein Punkt, welcher zumindest in einer kleinen Umgebung den größten Funktionswert besitzt. Formal definiert man das folgendermaßen:

Def. 3.8. Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. f hat an der Stelle x_0 ein

- *lokales Maximum*, wenn es ein Intervall $I = (a, b) \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, sodass gilt $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$.
- *striktes lokales Maximum*, wenn es ein Intervall $I = (a, b) \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, sodass gilt $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in I$.

- *lokales Minimum*, wenn es ein Intervall $I = (a, b) \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, sodass gilt $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.
- *striktes lokales Minimum*, wenn es ein Intervall $I = (a, b) \subset D$ mit $x_0 \in I$ gibt, sodass gilt $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in I$.

Besitzt f ein Maximum (bzw. Minimum) an der Stelle x_0, so nennt man $(x, f(x))$ einen *Hochpunkt* (bzw. *Tiefpunkt*). Ein *Extrempunkt* von f ist ein Hoch- oder ein Tiefpunkt. Man nennt das Extremum ein *globales* Extremum, falls in der jeweiligen Definition $I = D$ gewählt werden kann.



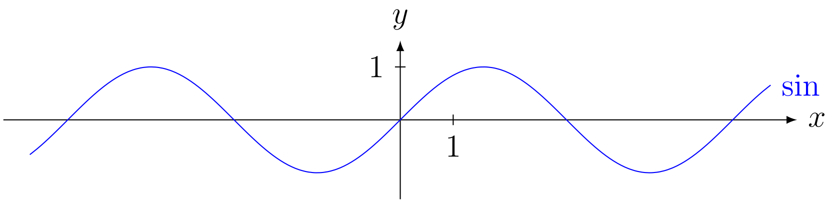
Beschränktheit

Def. 3.9. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- *nach oben beschränkt*, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- *nach unten beschränkt*, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \geq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- *beschränkt*, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bsp. 3.10. Die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt: es ist $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

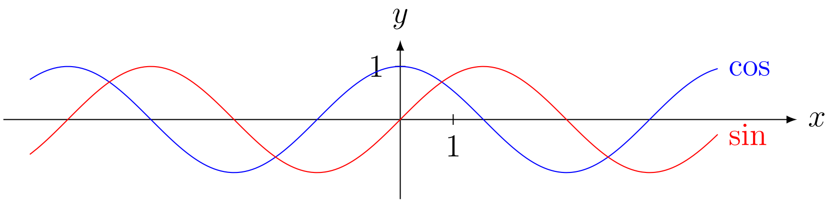


Symmetrie

Def. 3.11. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade Funktion*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hingegen nennt man eine Funktion *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die geraden Funktionen sind jene, die zur y-Achse symmetrisch sind. Ungerade Funktionen sind Ursprungs-symmetrischen Funktionen und somit spezielle punktsymmetrische Funktionen.

Bsp. 3.12. Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion. Hingegen ist die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion.



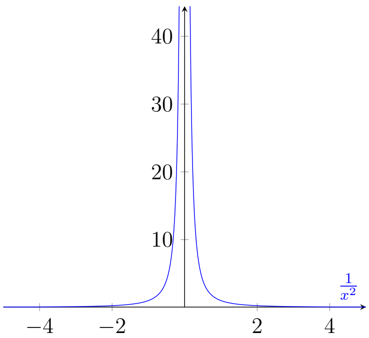
Einschub: Konvergenz und Grenzwert

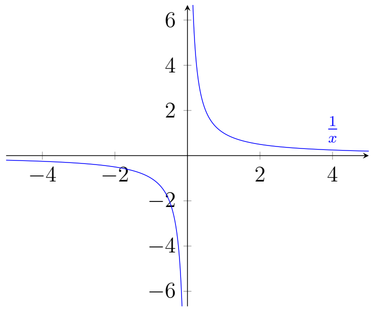
Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit Funktionen ist der Begriff des *Grenzwertes* (oder *Limes*). Wir sagen, dass der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ (sprich „x gegen x_0") gleich y ist, wenn sich $f(x)$ beliebig genau y annähert, sofern sich x entsprechend x_0 annähert. Wir schreiben dafür

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y.$$

Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$





Das kann man sich auch gut an den entsprechenden Funktionsgraphen veranschaulichen. Doch was hier intuitiv klar ist muss auch mathematisch sauber definiert werden. Dabei unterscheiden wir zwischen endlichen und unendlichen Argumenten und Grenzwerten.

Def. 3.13. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - y| < \epsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Wir sagen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y \text{ (bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y),$$

falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $L > 0$ gibt, sodass $|f(x) - y| < \epsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > L$ (bzw. $x < -L$).

Außerdem schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty),$$

falls es zu jedem $L > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > L$ (bzw. $f(x) < -L$) gilt für alle x mit $|x - x_0| < \delta$.

Außerdem führen wir noch die folgenden Begriffe ein:

Def. 3.14. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, y \in [-\infty, \infty]$.

- Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$, dann sagt man, f *konvergiert* für $x \to x_0$ gegen y.
- Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$ und $y \in \mathbb{R}$ endlich, dann heißt $f(x)$ *konvergent* für $x \to x_0$.
- Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, dann sagt man, $f(x)$ ist für $x \to x_0$ *bestimmt divergent*.
- Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert, dann sagt man, $f(x)$ ist für $x \to x_0$ *divergent*.

Zur Berechnung eines Grenzwertes gelten die folgenden Rechenregeln.

Satz 3.15 (Grenzwertsätze)**.** *Es sei $x_0 \in R$ und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, sodass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existiert und endlich ist. Dann gilt:*

1. *Es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.*
2. *Es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.*
3. *Falls $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, so existiert*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Für den Fall, dass eine der Funktionen gegen ∞ strebt, gelten die folgenden Aussagen.

Satz 3.16. *Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in [-\infty, \infty]$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ und es existiere der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Dann gilt:*

1. *Ist $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) > -\infty$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$.*
2. *Ist $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) > 0$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \infty$.*
3. *Ist $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, dann ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \infty$.*
4. *Es ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

Bem. 3.17. Die direkte Auswertung der folgenden Operationen ist *nicht zulässig*:
$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \cdot 0.$$

Bsp. 3.18. Man berechne den Grenzwert
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 7}.$$

Es ist $\lim_{x\to\infty}(3x^2 - 5x + 1) = \lim_{x\to\infty} x^2(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2})$. Wegen $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ und $\lim_{x\to\infty}(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}) = 3 + 0 + 0 = 3$ strebt der Zähler also gegen ∞. Hingegen ist $\lim_{x\to\infty}(-x^2 + 7) = -\infty$ und wir können den Grenzwert so nicht direkt bestimmen. Stattdessen machen wir folgendes:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(-1 + \frac{7}{x^2})} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x \to \infty}(-1 + \frac{7}{x^2})} = \frac{3}{-1} = -1.$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert

Wenn man die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ betrachtet, dann sieht man, dass sich die Funktion um die Polstelle $x = 0$ herum unterschiedlich verhält, je nachdem, ob man sich von der linken oder von der rechten Seite nähert. Dies führt uns auf den Begriff des links- bzw. rechtsseitigen Limes. Für f ist der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,$$

der Grenzwert von $f(x)$ bei Annäherung von links, währenddessen der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

der Grenzwert von $f(x)$ bei Annäherung von rechts ist.

Grundsätzlich versteht man also unter dem *linksseitigen Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bei Annäherung von links, also für $x < x_0$. Entsprechend versteht man unter dem *rechtsseitigen Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ bei Annäherung von rechts, also für $x > x_0$.

Stetigkeit

Def. 3.19. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ existiert und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Sei I ein Intervall. Die Funktion heißt *stetig auf* I, wenn f stetig in jedem Punkt $x_0 \in I$ ist. Ist f stetig auf $I = \mathbb{R}$, so nennt man f *stetig*.

Anschaulich gesprochen ist eine reelle Funktion stetig, wenn man ihren Funktionsgraphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Insbesondere müssen rechts- und linksseitiger Grenzwert

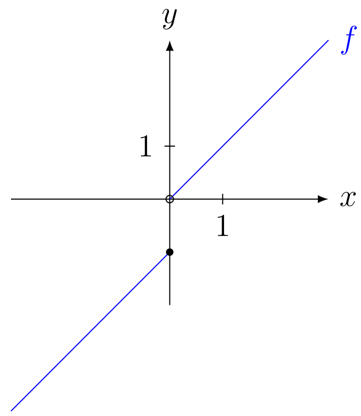
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

mit $f(x_0)$ übereinstimmen.

Bsp. 3.20. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{falls } x \leq 0, \\ x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

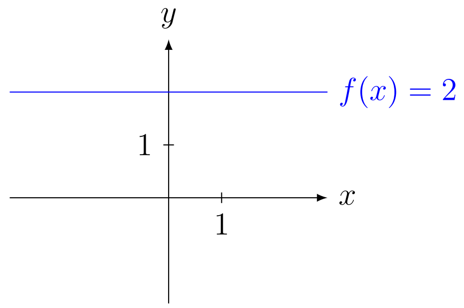
ist nicht stetig im Punkt $x = 0$, da der rechtsseitige Limes $\lim\limits_{x \to 0^+} f(0) = 0$ nicht mit dem Funktionswert $f(0) = -1$ übereinstimmt.



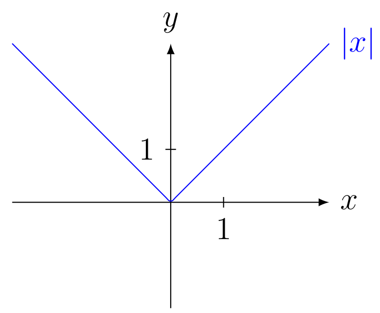
3.3 Grundlegende Funktionen

Es sollen an dieser Stelle einige elementare Funktionen angeführt werden. Im Umgang mit reellen Funktionen sollte man nicht nur die jeweiligen Funktionen kennen, sondern auch eine Vorstellung davon haben, wie die zugehörigen Funktionsgraphen aussehen. Alle angeführten Funktionen sind stetig.

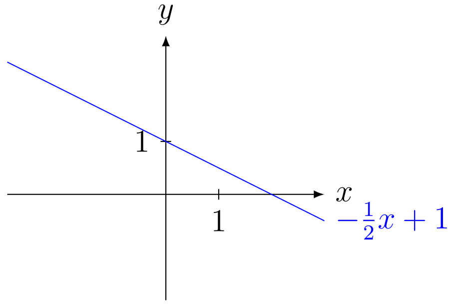
Konstante Funktionen sind Funktionen der Gestalt $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$.



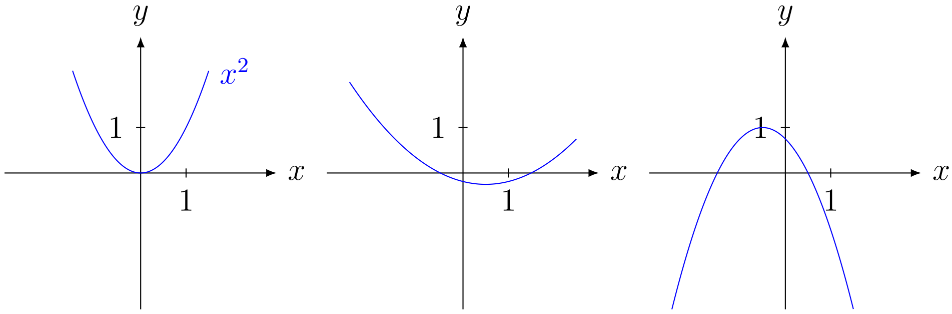
Die **Betragsfunktion** $f(x) = |x|$:



(Affin) lineare Funktionen sind Funktionen der Gestalt $f(x) = kx + d,\ k, d \in \mathbb{R}$. Ihr Funktionsgraph hat die Form einer Geraden mit Steigung k; d ist die Verschiebung auf der y-Achse und berechnet sich durch $d = f(0)$.

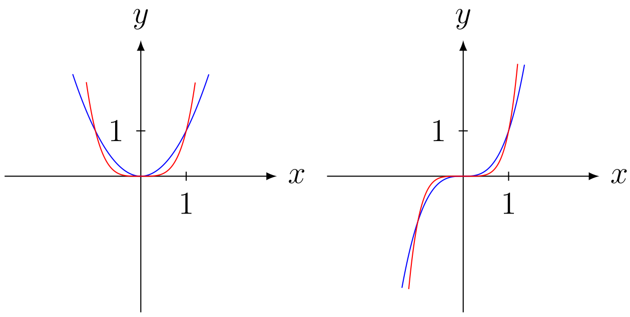


Quadratische Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Ihr Graph hat die Form einer Parabel. Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, falls $a < 0$, so ist sie nach unten geöffnet.



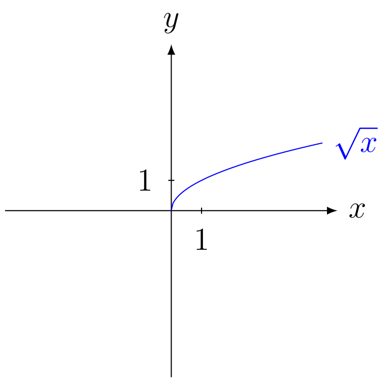
Die elementaren **Potenzfunktionen** $f(x) = x^n,\ \ n \in \mathbb{N}$ verhalten sich unterschiedlich, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Falls n gerade ist, so gilt $f(x) = x^n = (-x)^n = f(-x)$, also sind diese Funktionen symmetrisch zur y-Achse. Hingegen ergibt sich für ungerade n, dass $f(x) = x^n = -(-x)^n = -f(-x)$. Also sind diese Funktionen symmetrisch zum Ursprung.

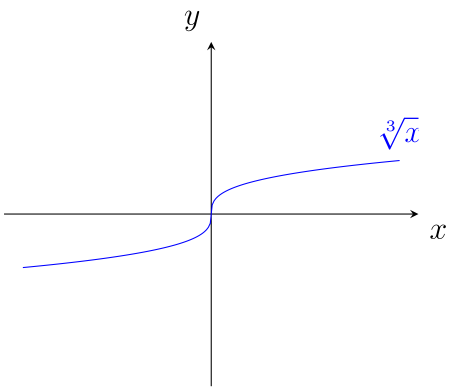
In der folgenden Abbildung sind links die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ (blau) und $x \mapsto x^4$ (rot) und rechts diejenigen von $x \mapsto x^3$ (blau) und $x \mapsto x^5$ (rot) abgebildet.



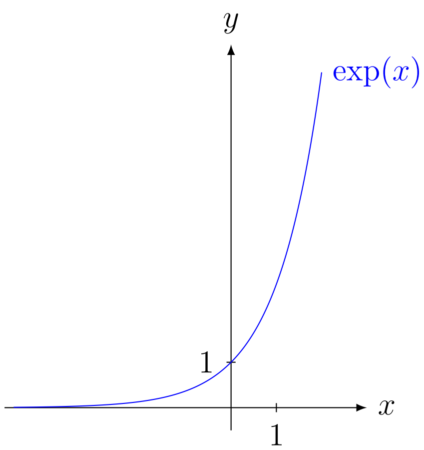
Polynomfunktionen haben wir schon bei den Gleichungen kennengelernt. Es handelt sich dabei um Funktionen der Form $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Der Verlauf des Funktionsgraphen ist je nach Grad und Koeffizienten unterschiedlich.

Die **Wurzelfunktionen** $f(x) = \sqrt[n]{x}$ sind für gerades $n \in \mathbb{N}$ nur für nicht-negative Werte definiert (da kein Quadrat, keine 4. Potenz, etc. einer reellen Zahl eine negative Zahl ergibt). Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist f hingegen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Diese Funktionen sind stets streng monoton wachsend und rechtsgekrümmt auf $\mathbb{R}^+$.

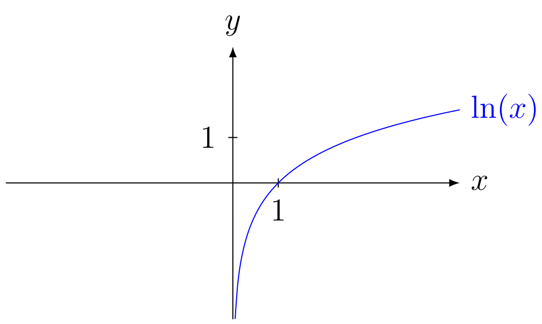




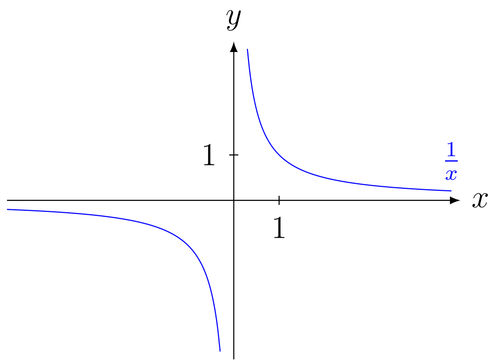
Die **Exponentialfunktion** (zur Basis e) ist die Funktion $\exp(x) = e^x$. Allgemein bezeichnet man Funktionen der Gestalt $f(x) = ca^x,\ a, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, a > 0$, als Exponentialfunktion.



Die natürliche **Logarithmusfunktion** $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\exp(x)$. Sie ist nur für positive Werte von x definiert. Ihre einzige Nullstelle ist $x_0 = 1$. Für $x \to 0^+$ geht die Funktion gegen $-\infty$, für $x \to \infty$ gegen ∞. Dies ist allen Logarithmusfunktionen (also auch zu anderen Basen) gemein.

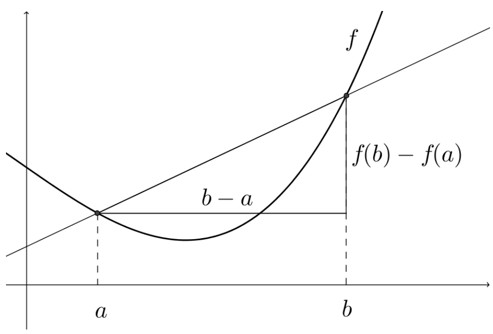


Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Form einer Hyperbel. Sie hat eine Polstelle bei $x_0 = 0$ und ist negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$. Der Graph nähert sich für $x \to \pm\infty$ der y-Achse. Für $x \to 0^-$ strebt die Funktion gegen $-\infty$, für $x \to 0^+$ hingegen gegen ∞.



3.4 Differentialrechnung – Grundlagen

Historisch betrachtet entwickelte sich die Differentialrechnung aus dem *Tangentenproblem*. Dieses wurde im 17. Jahrhundert unabhändig voneinander von G. W. Leibniz und I. Newton gelöst. Dabei geht es um die Frage, ob bzw. wie man zu einer gegebenen Funktion die Tangente in einem Punkt der Kurve betstimmen kann, wobei man unter der *Tangente* im Punkt A jene Gerade versteht, welche durch A geht und die Kurve in einem kleinen Bereich um den Punkt herum bestmöglich linear approximiert. Es ist ein naheliegender Ansatz, zunächst eine *Sekante* durch zwei Punkte $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ der Kurve zu betrachten und zu untersuchen, was mit der Sekante passiert, wenn man den Abstand von B zu A immer kleiner werden lässt. Die Steigung der Sekante ist durch den *Differenzenquotient* gegeben.



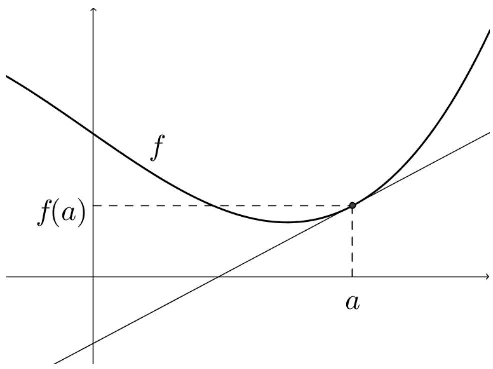
Def. 3.21. Der *Differenzenquotient* von f im Intervall $[a, b]$ ist der Quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Differenzenquotient gibt die *mittlere Änderungsrate* von f im Intervall $[a, b]$ an. Lässt man nun den Punkt B beliebig nahe an den Punkt A wandern, so geht der Differenzenquotient – sofern der Grenzwert existiert – in den *Differentialquotient* über.

Def. 3.22. Der *Differentialquotient* von f an der Stelle a ist definiert als

$$\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{(sofern der Grenzwert existiert).}$$



Dieser kann geometrisch als die Steigung der Tangente von f an der Stelle a interpretiert werden. Der Differentialquotient gibt die *momentane Änderung* der Funktion f an. Die Existenz dieses Grenzwertes ist natürlich nicht immer gegeben. Insbesondere müssen dabei links- und rechtsseitiger Limes existieren und übereinstimmen. Dass dies nicht immer der Fall ist kann man sich schon am einfachen Beispiel der Betragsfunktion verdeutlichen:

Bsp. 3.23. Es sei $f(x) = |x|$. Dann ist für $x = 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{|x+h|-|x|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Damit ergibt sich für den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1, \quad \text{jedoch} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1.$$

Man kann also in $x = 0$ keine Tangente an f legen.

Dies führt zu folgender Definition:

Def. 3.24. Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in a, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existiert. In dem Fall heist $f'(a)$ die *Ableitung* von f an der Stelle a.

Eine Funktion $f:\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Intervall $I = (a,b) \subset D$, falls f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist. Ist $D = (a,b)$ und f differenzierbar auf ganz D, so heißt f *differenzierbar*.

Man beachte, dass in dieser Definition lediglich eine andere Schreibweise für den Differentialquotient verwendet wird (mit $b = a+h$); man hätte sich genauso für die ursprüngliche Version entscheiden können.

Die Differentialrechnung hat viele Anwendungen innerhalb sowie außerhalb der Mathematik. Häufig werden etwa physikalische Phänomene in mathematischen Modellen mithilfe differenzierbarer Funktionen beschrieben, deren Ableitungsfunktionen wiederum interpretiert werden können. So kann beispielsweise die Ableitung einer Zeit-Weg-Funktion (als momentane Änderung des zurückgelegten Weges) als Geschwindigkeitsfunktion interpretiert werden, deren Ableitung gibt wiederum (als momentane Änderung der Geschwindigkeit) die Beschleunigung an.

Def. 3.25 (Ableitungsfunktion, Stammfunktion)**.** Ist $f:\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist durch

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eine Funktion $f':\ D \to \mathbb{R}$ defniert, die sogenannte *Ableitungsfunktion* von f. Umgekehrt nennt man f eine *Stammfunktion* von f'.

Bem. 3.26. Statt f' schreiben wir auch $\frac{df}{dx}$.

Bsp. 3.27. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Wir bestimmen die Ableitungsfunktion (und zeigen zugleich, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist):

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.\end{aligned}$$

Damit ist die Ableitung von f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ definiert und es gilt $f'(x) = 2x$.

Ableitungsregeln

Um in der Praxis die Ableitung nicht jedesmal über den Grenzwert bestimmen zu müssen, kann man auf die folgenden Ableitungsregeln zurückgreifen.

Satz 3.28 (Potenzregel)**.** *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$. Dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Satz 3.29 (Linearität der Ableitung)**.** *Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $af + bg : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x).$$

Satz 3.30 (Produktregel)**.** *Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $fg : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Satz 3.31 (Quotientenregel)**.** *Es seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in D$ mit $g(x) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Satz 3.32 (Kettenregel)**.** *Es seien $g : D \subset \mathbb{R} \to D' \subset \mathbb{R}$ und $f : D' \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über einige wichtige Funktionstypen und Ihre Ableitungsfunktionen.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

Bsp. 3.33. Die folgenden Beispiele illustrieren die verschiedenen Ableitungsregeln.

(a) Für $f(x) = x^5$ ist $f'(x) = 5x^4$.

(b) Für $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2 + x^{-3}$ ist $f'(x) = 15x^4 - 6x^2 - 3x^{-4}$.

(c) Für $f(x) = 3x^5e^x$ ist $f'(x) = 15x^4e^5 + 3x^5e^x = (15x^4 + 3x^5)e^x$.

(d) Für $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x^3+1}$ ist $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x^3+1)-(x^2-3x+1)6x^2}{(x^2-3x+1)^2}$.

(e) Für $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

3.5 Kurvendiskussion

Bei einer *Kurvendiskussion* wird eine gegebene Funktion auf eine Reihe von Eigenschaften untersucht, wie etwa Definitions- und Wertebereich, Nullstellen und Pole, Extremstellen, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten, etc. Einige dieser Eigenschaften wurden bereits besprochen. Für differenzierbare Funktionen ergeben sich manchmal auch neue

Möglichkeiten bei der Untersuchung mithilfe der Differentialrechnung. Es sei für den gesamten Abschnitt $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

Definitions- und Wertebereich

Falls lediglich die Zuordnungsvorschrift der zu untersuchenden Funktion angegeben ist, so bestimmt man den größtmöglichen Definitionsbereich, indem man untersucht, welche Werte ausgeschlossen werden müssen. Darunter fallen etwa Werte, für welche eine Division durch Null entstehen würde oder solche, welche sich aus den natürlichen Definitionsbereichen von Grundfunktionen ergeben, wie zum Beispiel $\mathbb{R}_0^-$ bei Logarithmusfunktionen oder $\mathbb{R}^-$ bei (geraden) Wurzelfunktionen.

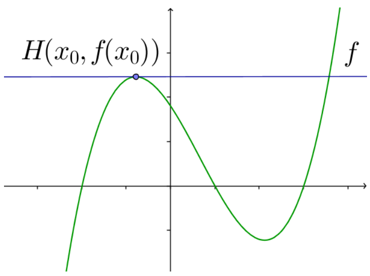
Nullstellen und Pole

Die Nullstellen ergeben sich als Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Bei rationalen Funktionen sind die Polstellen die Nullstellen des Nennerpolynomes, vgl. dazu Abschnitt 3.2.

Extrempunkte, Krümmung und Monotonieverhalten

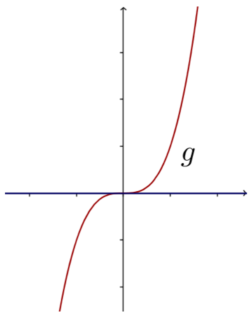
Die Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten sowie der Monotoniebereiche ist ebenfalls grundlegender Teil einer Kurvendiskussion. Für die entsprechenden Definitionen siehe Abschnitt 3.2. Für differenzierbare Funktionen ergeben sich hier manchmal neue Möglichkeiten.

Es sei f eine differenzierbare Funktion und x_0 ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum. Dann ist die Tangente an f an der Stelle x_0 waagerecht.



Daher ist $f'(x_0) = 0$ eine *notwendige Bedingung* dafür, dass f eine lokale Extremstelle an der Stelle x_0 hat.

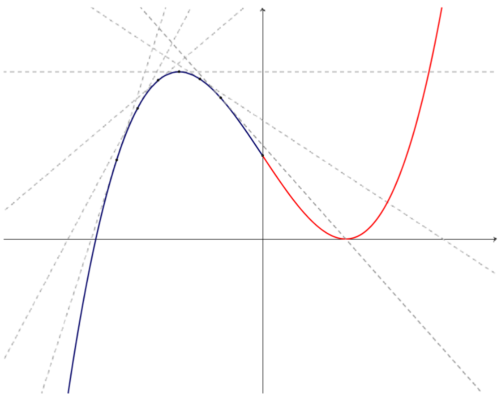
Allerdings ist $f'(x) = 0$ keine *hinreichende Bedingung* dafür, dass eine lokale Extremstelle vorliegt. betrachtet man etwa die Funktion $f(x) = x^3$, so gilt $f'(x) = 3x^2$ und somit $f'(0) = 0$. Es ist aber der Punkt $(0, 0)$ weder ein Minimum noch Maximum, da *für jedes* $x < 0$ der Funktionswert $f(x) < 0$, bzw. *für jedes* $x > 0$ der Funktionswert $f(x) > 0$ ist.

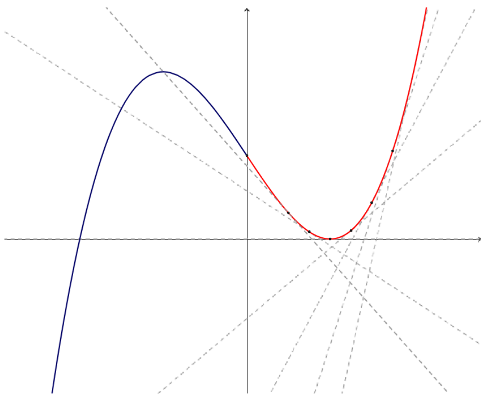


In diesem Fall liegt ein sogenannter *Sattelpunkt* vor, ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Def. 3.34. Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $x \in D$. f heißt *linksgekrümmt* (oder *konvex*) in x, wenn $f''(x) > 0$ ist. Hingegen heißt f *rechtsgekrümmt* (oder *konkav*) in x, wenn $f''(x) < 0$. Analog dazu nennt man f *linksgekrümmt* (bzw. *rechtsgekrümmt*) in einem Intervall $I = (a, b)$, wenn f an jeder Stelle $x \in I$ linksgekrümmt (bzw. rechtsgekrümmt) ist.

Bsp. 3.35. Die Funktion in der folgenden Abbildung ist rechtsgekrümmt im Bereich $(-\infty, 0)$ und linksgekrümmt im Bereich $(0, \infty)$.





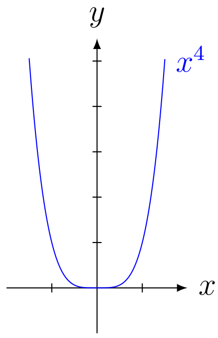
Auf $(-\infty, 0)$ nimmt die Tangentensteigung mit wachsendem x ab, währenddessen die Steigung im Bereich $(0, \infty)$ immer größer wird, wenn man x vergrößert. Dort ist die Änderung der Steigung positiv, also die Ableitung der ersten Ableitung, sprich die zweite Ableitung, positiv.

Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema gibt der folgende Satz. Er besagt, dass wenn eine Funktion in einem Punkt x_0 eine waagerechte Tangente besitzt und dort rechtsgekrümmt (bzw. linksgekrümmt) ist, dann liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum (bzw. Minimum) vor.

Satz 3.36. *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in D$ zweimal differenzierbare Funktion. Dann hat f ein lokales Minimum (bzw. Maximum) in x_0, wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) ist.*

Aber Achtung: Der Satz gibt zwar ein hinreichendes Kriterium für Extrempunkte, jedoch gibt es auch Fälle von Extrema, für welche die zweite Ableitung ebenfalls verschwindet.

Bsp. 3.37. Die Funktion $f(x) = x^4$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales (und auch globales) Minimum, denn es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Dennoch ist wegen $f''(x) = 12x^2$ auch $f''(0) = 0$.



Wendepunkte

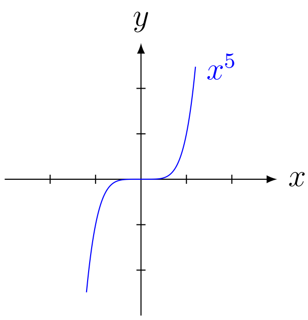
Def. 3.38. Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt *Wendepunkt* von f, wenn sich das Krümmungsverhalten von f an der Stelle x_0 ändert (d.h. wenn an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel der Funktion $f''(x)$ vorliegt).

Ähnlich wie für Extremstellen gibt der folgende Satz eine hinreichende Bedingung dafür an, dass für eine Funktion f im Punkt x_0 ein Wendepunkt vorliegt.

Satz 3.39. *Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist ein Wendepunkt von f, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist.*

Aber Achtung: Auch hier gibt der Satz zwar ein hinreichendes Kriterium an, jedoch gibt es auch Wendepunkte, in denen die dritte Ableitung verschwindet.

Bsp. 3.40. Die Funktion $f(x) = x^5$ hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt, denn es gilt $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$ für alle $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$. Dennoch ist wegen $f'''(x) = 60x^2$ auch $f'''(0) = 0$.



Bsp. 3.41. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + \frac{7}{3}$. Wir möchten die Wendepunkte der Funktion bestimmen und berechnen dafür zunächst $f''(x) = 2x - 4$. Die einzige Nullstelle von f'' ist $x = 2$, somit ist dies der einzige Kandidat für einen Wendepunkt. Nachdem $f'''(x) = 2 \neq 0$ ist, liegt auch tatsächlich ein Wendepunkt vor. Wir berechnen noch die y-Koordinate $f(2) = -1$. Also hat die Funktion einen Wendepunkt, nämlich den Punkt $W(2, -1)$.

Wendetangente

Unter einer *Wendetangente* versteht man eine Tangente an eine Funktion f in einem Wendepunkt von f. Diese lässt sich wie folgt bestimmen. Es sei $W(x_0, f(x_0))$ der Wendepunkt von f, in welchem die Tangente angelegt werden soll. Als Gerade hat die Wendetangente zunächst die Gestalt

$$t_W : \; y = kx + d,$$

wobei k die Steigung der Geraden und d die Verschiebung auf der y-Achse ist. Es gilt diese beiden Parameter zu bestimmen. Die Steigung ist aber gerade durch die erste Ableitung gegeben, also $k = f'(x_0)$. Den zweiten Parameter kann man daher leicht aus der Gleichung $y_0 = kx_0 + d$ bestimmen.

Krümmungsverhalten

Um das Krümmungsverhalten einer Funktion zu bestimmen, sind jene Bereiche zu ermitteln, auf welchen die Funktion links- bzw. rechtsgekrümmt, bzw. nicht gekrümmt ist. Es sind also die Ungleichungen $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ zu lösen.

Falls f'' stetig ist, kann man alternativ dazu auch zunächst alle Stellen mit $f''(x) = 0$ bestimmen. Dann ist das Krümmungsverhalten in den Bereichen zwischen zwei aufeinanderfolgender solcher Werte x_n, x_{n+1} (bzw. bis zum ersten und ab dem letzten) gleich, also entweder überall rechts- oder überall linksgekrümmt. Es reicht in diesem Fall also, die zweite Ableitung eines einzelnen Wertes zwischen x_n und x_{n+1} zu berechnen um zu bestimmen, welche Situation vorliegt.

Verhalten am Rand des Definitionsbereiches

Hier sind noch die Grenzwerte der Funktion an den Rändern des Definitionsbereiches zu bestimmen. Falls der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ ist, so betrachtet man $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Funktionsgraph

Zuletzt skizziert man (wenn möglich) noch den Funktionsgraphen. Wenn man keine technischen Hilfsmittel benutzt, so macht es hier Sinn, die bereits berechneten wichtigen Punkte (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) einzuzeichnen und sich je nach erwünschter Genauigkeit noch ein paar Werte aus der Funktionsvorschrift zu berechnen. Ebenso sollte man natürlich auch die anderen Informationen, wie Monotonie, Krümmung und Grenzverhalten, berücksichtigen.

Bsp. 3.42. Es soll die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ diskutiert werden.

Wir bestimmen zunächst für die weiteren Berechnungen den Block der ersten drei Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 2, \\ f''(x) &= 6x - 6, \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Als Polynomfunktion erhalten wir ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich. Da f ein Polynom ungeraden Grades ist, wird auch jedes $x \in \mathbb{R}$ als Funktionswert angenommen. Somit ergibt sich

$$D = \mathbb{R}, \qquad W = \mathbb{R}.$$

Nullstellen
Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, also $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$, zu bestimmen. Um eine erste Lösung zu erhalten, überprüfen wir, ob f eine rationale Lösung besitzt. Als mögliche Kandidaten kommen nach dem Lemma von Gauß nur Teiler von 6 infrage, für welche wir der Reihe nach den Funktionswert bestimmen, in der Hoffnung, eine Nullstelle zu finden.

x	$f(x)$
1	2
-1	4
2	-2
-2	-10
3	0

Es ist also $f(3) = 0$. Um die weiteren Nullstellen zu bestimmen, spalten wir den Linearfaktor $(x - 3)$ von f ab:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 3x^2 - 2x + 6\big) : \big(x - 3\big) = x^2 - 2 \\ \underline{\;-x^3 + 3x^2\;} \\ \qquad\qquad\; -2x + 6 \\ \qquad\qquad\; \underline{\;\;\; 2x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Es folgt $f(x) = (x^2 - 2)(x - 3)$. Die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ hat die beiden Lösungen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Mit $x_3 = 3$ erhalten wir schließlich alle drei Nullstellen

$$N_1(-\sqrt{2}, 0),\; N_2(\sqrt{2}, 0),\; N_3(3, 0).$$

Extrempunkte
Wir lösen zunächst die Gleichung $f'(x) = 0$. Es hat $3x^2 - 6x - 2 = 0$ die beiden Lösungen $x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{5/3}$. Wegen $f''(1 - \sqrt{5/3}) < 0$ liegt an dieser Stelle ein Hochpunkt vor. Als Funktionswert ergibt sich (nach kurzer Rechnung) $f(1 - \sqrt{5/3}) = 2 + 10/3\sqrt{5/3}$.

Analog ergibt sich $f''(1+\sqrt{5/3}) > 0$, weshalb hier ein Tiefpunkt vorliegt. Es ist $f(1+\sqrt{5/3}) = 2 - 10/3\sqrt{5/3}$. Wir erhalten also den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T mit den Koordinaten

$$H(1-\sqrt{\frac{5}{3}}, 2+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}), \qquad T(1+\sqrt{\frac{5}{3}}, 2-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}).$$

Monotonie

Es ist $f'(x) > 0$ in den Bereichen $(-\infty; 1-\sqrt{5/3})$ und $(1+\sqrt{5/3}; \infty)$. Hingegen ist $f'(x) < 0$ auf $(1-\sqrt{5/3}; 1+\sqrt{5/3})$. Daher stellt sich das Monotonieverhalten von f wie folgt dar:

$$\begin{array}{ll} (-\infty; 1-\sqrt{5/3}): & f \text{ ist streng monoton steigend.} \\ (1-\sqrt{5/3}; 1+\sqrt{5/3}): & f \text{ ist streng monoton fallend.} \\ (1+\sqrt{5/3}; \infty): & f \text{ ist streng monoton steigend.} \end{array}$$

Wendepunkte und Wendetangenten

Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat genau eine Lösung, $x = 1$. Da $f'''(1) = 6 \neq 0$ ist, hat f also einen Wendepunkt an der Stelle $x = 1$. Es ist $f(1) = 2$, also erhalten wir den (einzigen) Wendepunkt $W(1, 2)$.

Zur Bestimmung der Gleichung der Wendetangente t_W berechnen wir zunächst die Steigung $k = f'(1) = -5$. Aus der Gleichung $y = kx + d$ und da $W \in t_W$ folgt $d = 7$. Damit erhalten wir

$$t_W: \; y = -5x + 7.$$

Krümmungsverhalten

Es gilt $f''(x) < 0$ genau dann, wenn $x < 1$, und $f''(x) > 0$ genau für $x > 1$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} (-\infty; 1): &\; f \text{ ist rechtsgekrümmt.} \\ (1; \infty): &\; f \text{ ist linksgekrümmt.} \end{aligned}$$

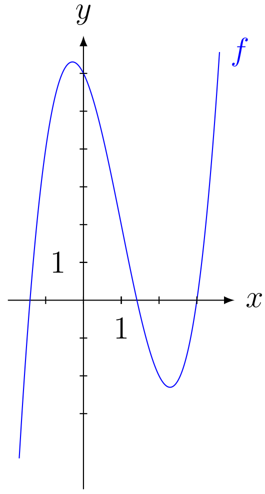
Verhalten am Rande des Definitionsbereiches

Da $D = \mathbb{R}$ ist, müssen wir hier lediglich das Grenzverhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ untersuchen. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x^2 - 2x + 6) \\ &= \lim_{x\to\infty} (\underbrace{x^3}_{\to\infty} \underbrace{(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3})}_{\to 1}). \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt also hier $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Analog erhält man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Zuletzt plotten wir noch den **Funktionsgraphen**:

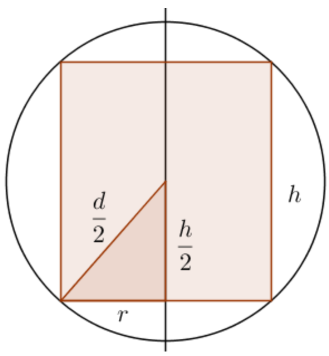


3.6 Extremwertaufgaben

Eine Anwendung der Differentialrechnung, die auch im Schulunterricht gerne gelehrt wird, liegt in sogenannten *Extremwertaufgaben*. Dabei soll irgendeine Größe, die zunächst meist von mehreren Variablen abhängt, maximiert oder minimiert werden. Die Frage lautet dann: Unter welchen Bedinungen ist dies der Fall? Mithilfe von Nebenbedingungen verringert man dabei zuerst die Anzahl der Variablen und bestimmt danach Extremwerte der entsprechenden Funktion.

Bsp. 3.43. Einer Kugel mit Durchmesser d soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen eingeschrieben werden. Wie sind die Abmessungen des Zylinders in Abhängigkeit von d zu wählen?

Wir bezeichnen den Radius der Grundfläche des Zylinders mit r und seine Höhe mit h. Dann ist dessen Volumen gegeben durch $V(r,h) = r^2\pi h$. Wir fassen dies als Funktion in Abhängigkeit von r und h auf. Unabhängig von den Abmessungen des Zylinders wird dieser von innen bis an die Oberfläche der Kugel reichen, denn sonst gäbe es offensichtlich einen größeren eingeschriebenen Zylinder. Dann ist die Verlängerung der Zylinderachse eine Achse durch die Kugel. Schneidet man die Kugel entlang dieser Achse durch, so ergibt sich folgender Zusammenhang:



Offenbar bilden $d/2$, $h/2$ und r die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks. Damit erhalten wir die *Nebenbedingung*

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2, \text{ also } r^2 = \frac{d^2 - h^2}{4}.$$

Setzen wir dies in unsere Funktion V ein, so erhalten wir

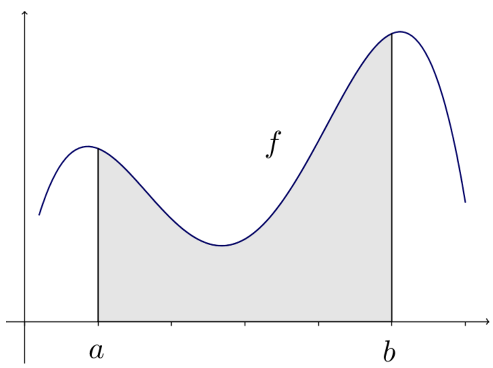
$$V(h) = h \cdot \frac{d^2 - h^2}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}(d^2 h - h^3).$$

Nachdem wir Abmessungen jenes Zylinders suchen, sodass das Volumen maximal wird, berechnen wir die Extremwerte von $V(h)$. Aus der Gleichung $V'(h) = \frac{\pi}{4}(d^2 - 3h^2) = 0$ erhalten wir die Lösung $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Zudem ist die zweite Ableitung $V''(h) = \frac{\pi}{4}(-6h)$ und somit $V''(\frac{d}{\sqrt{3}}) < 0$. Es liegt also an dieser Stelle ein Maximum vor. Der Radius des Zylinders ergibt sich aus der Nebenbedingung: $r^2 = \frac{d^2-h^2}{4} = \frac{1}{4}(d^2 - \frac{d^2}{3}) = \frac{d^2}{6}$. Zusammenfassend hat also der Zylinder die Abmessungen

$$h = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad r = \frac{d}{\sqrt{6}}.$$

3.7 Integralrechnung – Grundlagen

Die Integralrechnung ist eng verknüpft mit der Differentialrechnung – gemeinsam bilden diese den Kern der Analysis. Während der Ausgangspunkt bei der Differentialrechnung das Tangentenproblem darstellt, so wird die Integralrechnung geometrisch dadurch motiviert, dass zu einer gegebenen Funktion f die Fläche zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen in einem bestimmten Bereich $[a, b]$ bestimmt werden soll.

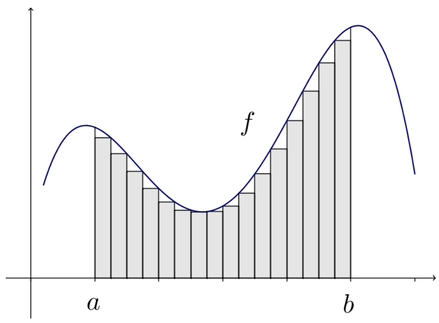


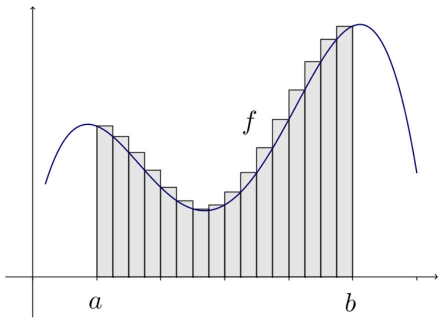
Dies ist grundsätzlich nicht immer möglich, die Funktion muss im betreffenden Bereich *integrierbar* sein (eine genaue Definition folgt etwas weiter unten). Falls so ein Flächeninhalt eindeutig bestimmt ist, so bezeichnet das *bestimmte Integral* von a nach b der Funktion f

$$\int_a^b f(x)dx$$

den *orientierten Flächeninhalt* zwischen Kurve und x-Achse. Man nennt $f(x)$ den Integranden, a und b die *Integrationsgrenzen* und x die *Integrationsvariable*. Mit *orientiert* ist gemeint, dass jene Bereiche, in denen die Kurve negativ ist, negatives Vorzeichen haben.

Damit ist zunächst nicht viel gewonnen, stellt sich doch die Frage, wie man die Fläche bestimmen kann. Ausgangspunkt hierfür ist die Annäherung durch *Ober-* und *Untersummen*. Dabei unterteilt man zunächst den Integrationsbereich $[a, b]$ in einzelne Teilstücke – zum Beispiel kann man eine äquidistante Einteilung in n Teilintervalle der Länge $(b-a)/n$ wählen – und berechnet die Summe der Flächen jener Rechtecke, deren Höhe der kleinste (für die Untersumme) bzw. größte (im Fall der Obersumme) Funktionswert von f in dem jeweiligen Intervall ist. Der tatsächliche Flächeninhalt liegt dann, sofern er eindeutig bestimmt ist, irgendwo zwischen Unter- und Obersumme.





Die Grundidee ist es nun, die Einteilung immer feiner zu machen, sodass dadurch der Fehler möglichst gering ist. Ist es möglich, den Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beliebig klein zu machen indem man die Einteilung entsprechend verfeinert, dann ist auch der Fehler zur tatsächlichen Fläche beliebig klein und man nennt die Funktion *integrierbar*.

Def. 3.44. Eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-)integrierbar* auf $[a, b]$, wenn das Infimum aller Obersummen mit dem Supremum aller Untersummen von f auf $[a, b]$ übereinstimmt.

Damit hat man einen grundsätzlichen Ansatz zur Berechnung der gesuchten Fläche. Bemerkenswerterweise besteht aber auch ein direkter Zusammenhang mit der Differentialrechnung, der zudem vieles erleichtert. Es gilt nämlich der folgende Satz, welcher zwei grundlegende Aussagen beinhaltet.

Satz 3.45 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechung)**.** *Es sei I ein Intervall und $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

1. *Für alle $x \in I$ ist*
$$F(x) := \int_a^x f(x)dx$$
eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$.

2. *Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann ist*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Zur Erinnerung: Eine Funktion $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist für jede Konstante C auch stets

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

Somit hat jede Funktion, sofern sie überhaupt eine Stammfunktion besitzt, gleich unendlich viele verschiedene Stammfunktionen. Wir schreiben

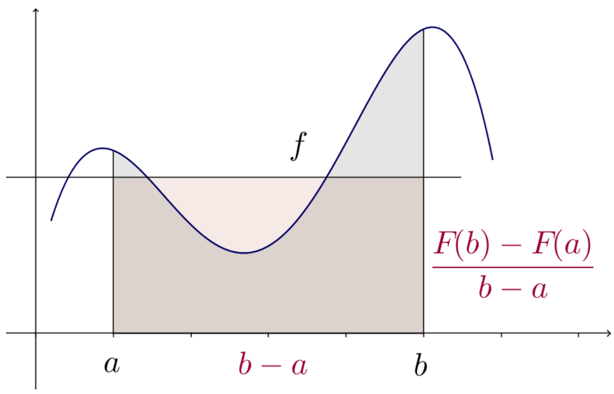
$$F(x) = \int f(x)dx + C,\ C \in \mathbb{R},$$

und nennen $\int f(x)dx$ das *unbestimmte Integral* von f.

Aber wie erklärt sich hier der Zusammenhang mit der Differentialrechnung? Wir stellen uns zur Anschauung eine auf dem Intervall $[a, b]$ positive, stetige Funktion vor. Dann ist $F(x) - F(a)$ die Fläche unterhalb der Kurve im Intervall $[a, x]$ und

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

die durchschnittliche Höhe von f in diesem Intervall, also der durchschnittliche Funktionswert.



Wenn man nun den Abstand zwischen a und x immer kleiner macht, dann wird dieser Wert eine gute Näherung für den Funktionswert $f(x)$ liefern, das heißt

$$\lim_{a \to x} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(x).$$

Aber dies ist offenbar nichts anderes, als der Differentialquotient, also die Ableitung von F an der Stelle x.

Integrationsregeln

Das *Integrieren*, also das Auffinden einer Stammfunktion, ist im Allgemeinen ein viel schwierigeres Problem als das Ableiten einer gegebenen Funktion. Bei der Bestimmung kann man auf folgende Integrationsregeln zurückgreifen.

Für eine auf $[a, b]$ integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in [a, b]$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Außerdem gelten die folgenden Rechenregeln (analog auch für bestimmte Integrale):

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

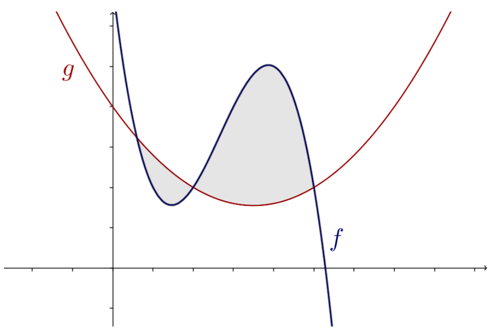
$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über einige wichtige Funktionstypen und Ihre Stammfunktionen (ohne Integrationskonstante).

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n mit $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

$f(x)$	$F(x)$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\log_a x$	$\frac{x \ln x - x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\cot x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$

Bsp. 3.46. Die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 17x - 14)$ und $g(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 7x + 20)$ schneiden sich in $x_0 = 2$. Man berechne den von den beiden Funktionen eingeschlossen Flächeninhalt.



Wir berechnen zunächst die verbleibenden Schnittstellen, indem wir die beiden Funktionen schneiden. Dafür lösen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$. Nachdem wir die Gleichung vereinfacht haben erhalten wir die dazu äquivalente Gleichung $5x^3 - 38x^2 + 71x - 30 = 0$. Nachdem sich die Funktionen in $x_0 = 2$ schneiden, ist dies eine Lösung dieser Gleichung. Daher spalten wir diesen Linearfaktor ab:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad 5x^3 - 38x^2 + 71x - 30\big) : \big(x - 2\big) = 5x^2 - 28x + 15 \\
\underline{\;-5x^3 + 10x^2\;} \\
\qquad\quad -28x^2 + 71x \\
\qquad\quad \underline{\;\;28x^2 - 56x\;} \\
\qquad\qquad\qquad 15x - 30 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-15x + 30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die weiteren Schnittpunkte erhalten wir also aus den Nullstellen von $5x^2 - 28x + 15$. Diese sind gegeben durch $x_1 = 3/5$ und $x_2 = 5$. Im Intervall $(3/5, 2)$ ist $f(x) < g(x)$ (d.h. es liegt f unterhalb von g), in $(2, 5)$ ist hingegen $f(x) > g(x)$ ist. Daher ist die erste der eingeschlossenen Flächen gegeben durch

$$A_1 = \int\limits_{3/5}^{2} (g(x) - f(x))dx,$$

und die zweite der Flächen berechnet sich aus

$$A_2 = \int\limits_{2}^{5} (f(x) - g(x))dx.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{3/5}^{2} (g(x) - f(x))dx &= \int_{3/5}^{2} (\frac{1}{5}(x^2 - 7x + 20) + \frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 17x - 14))dx \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 20x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} - 14x\right)\Bigg|_{5/3}^{2} \\
&\approx 0.85 \text{ FE}.
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die zweite Fläche

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{5} (f(x) - g(x))dx &= -\frac{1}{5}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 20x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} - 14x\right)\Bigg|_{2}^{5} \\
&\approx 6.53 \text{ FE}.
\end{aligned}$$

Also begrenzen die beiden Funktionen eine Fläche von $A_1 + A_2 \approx 0.85 + 6.53 = 7.38$ FE.

Partielle Integration
Die partielle Integration liefert eine Formel um Produkte zweier Funktionen $f(x)g(x)$ zu integrieren.

Satz 3.47. *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen (d.h. f und g sind stetig, differenzierbar und die Ableitung ist ebenfalls stetig). Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Die Formel gilt analog für unbestimmte Integrale. Bei der Verwendung der Formel für die partielle Integration ist es ratsam, sich vorab zu überlegen, welcher Faktor für welche Funktion in der Formel stehen soll. Das Ziel ist es, dass das neue Integral, das man auf der rechten Seite erhält, einfacher zu bestimmen ist als das ursprüngliche.

Bsp. 3.48. Man bestimme eine Stammfunktion H von $h(x) = xe^x$. Wir setzen in der Formel für die partielle Integration $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$ (weil dann $f'(x) = 1$ ist). Dann ist $g(x) = e^x$ und somit erhalten wir

$$H(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Stimmt das Ergebnis auch wirklich? Wir machen die Probe und differenzieren: $H'(x) = xe^x + 1e^x - e^x = xe^x = h(x)$, also ist H tatsächlich eine Stammfunktion von h.

Bsp. 3.49. Gesucht ist eine Stammfunktion von $\sin^2(x)$. Wir verwenden partielle Integration und die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= \int \sin(x)\sin(x)dx \\ &= \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos(x)\cos(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))dx.\end{aligned}$$

Daraus folgt aber $2\int \sin^2(x)dx = \int 1dx - \sin(x)\cos(x)$, also

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Substitution
Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Integralen besteht darin, eine Transformation (Substitution) der Integrationsvariablen durchzuführen. Durch geschickte Wahl der Substitution kann man oft das Integral vereinfachen und somit die Berechnung erleichtern. Man beachte, dass sich bei dem bestimmten Integral dabei auch die Integrationsgrenzen verändern. Man kann aber auch nach der Integration wieder Rücksubstituieren; in diesem Fall bleiben die Grenzen natürlich unverändert.

Satz 3.50. *Es sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $u : [a,b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $u([a,b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Bsp. 3.51. Man bestimme das bestimmte Integral

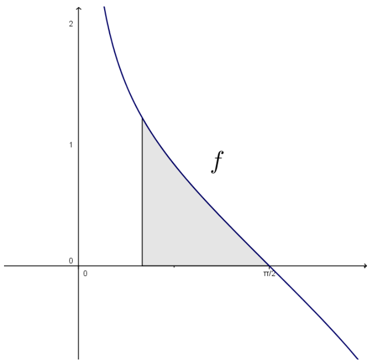
$$\int_{\pi/6}^{\pi/62} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

Wir substitutieren $u = \sin x$. Damit folgt $\frac{du}{dx} = \cos x$, also $dx = du/\cos x$. Wir bestimmen zuerst das unbestimmte Integral und kümmern uns zunächst nicht um die Integrationsgrenzen. Damit ergibt sich

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} = 2\sin x^{1/2} = 2\sqrt{\sin x}.$$

Damit haben wir eine Stammfunktion gefunden und können das bestimmte Integral berechnen:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = 2\sqrt{\sin x}\,\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$



Aufgaben

1. Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$. Wie geht die Funktionsvorschrift von $f_i, i = 1, \ldots, 5,$ aus derjenigen von f hervor? Skizzieren Sie die Funktionen $f_i,\ i = 1, \ldots, 5,$ für $f(x) = x^3$.

   (a) Der Graph von f_1 ist der Graph von f um 3 nach links verschoben.

   (b) Der Graph von f_2 ist der Graph von f um 2 nach unten verschoben.

   (c) Der Graph von f_3 ist der Graph von f gespiegelt an der x-Achse.

   (d) Der Graph von f_4 ist der Graph von f gespiegelt an der y-Achse.

   (e) Der Graph von f_5 ist der Graph von f gestaucht mit dem Faktor 0.5.

2. Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich der folgenden reellwertigen Funktionen an und skizzieren Sie den Funktionsgraphen ohne technische Hilfsmittel.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{3x - 10} + 2$

(b) $g(x) = -5(x+1)^{(2/3)} + 1$

3. Gegeben sind die beiden Funktionen $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$. Bestimmen Sie $f+g$, $g \circ f$ und $f \circ g$.

4. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ auf zwei Arten:

   (a) Indem sie durch eine Fallunterscheidung die Definition überprüfen. Faktorisiere Sie dafür $x^3 - y^3$ in geeigneter Weise.

   (b) Mithilfe der Differentialrechnung.

5. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren an. Skizzieren Sie den Funktionsgraphen und lesen Sie anhand dessen das Monotonie- und das Krümmungsverhalten ab. Verifizieren Sie dies rechnerisch.

6. Differenzieren Sie die angegebenen Funktionen nach t.

   (a) $f(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right)^3 - \sin(t^2)$

   (b) $g(t) = (3t - 5t^2 + 2)\sqrt{1-t^3}$

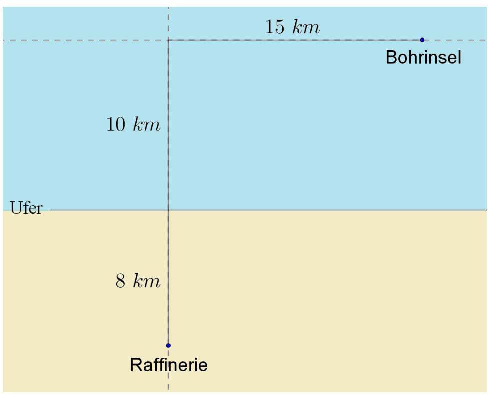
   (c) $h(t) = e^{\cos(\frac{1}{t})}$

7. Diskutieren Sie folgende Funktionen:

   (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x-2)$

   (b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2x-3} + 1.5$

8. Zwischen einer Raffinerie und einer Bohrinsel soll eine Pipeline verlegt werden. Die Verlegung kostet auf dem Festland 400 000 EUR und im Wasser 850 000 EUR. Wie muss die Pipeline verlegt werden, damit die Kosten möglichst niedrig gehalten werden?



9. Ein Fenster mit fix vorgegebenem Umfang u soll die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Wie sollen die Abmessungen des Fensters gewählt werden, damit die Fläche und somit der Lichteinfall möglichst groß ist?

10. Eine Polynomfunktion dritten Grades $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$. In diesem Schnittpunkt ist die Gleichung der Tangente gegeben durch $t_{N_1}: \ y = 3x + d$. Zudem ist $H(-2, 6)$ ein Hochpunkt der Funktion. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

11. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
    (a) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten und geben Sie den Wendepunkt sowie eine Gleichung der Wendetangente an.
    (b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen und bestimmen Sie Defninitions- und Wertemenge.

12. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f aus Aufgabe 11. Berechnen Sie damit die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[0; \ln(2)^2]$. (Hinweis: Substitution und partielle Integration.)

13. Geben Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen an.
    (a) $f(x) = 23x^3 - \frac{2x-3}{x^2} + e^x$
    (b) $g(x) = \frac{1}{2x-1}$
    (c) $h(x) = \sin x \cos x$

14. Bestimmen Sie jene Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Ableitung $h'(x) = \frac{x \cdot \sin(2x)}{3}$ und mit $h(\frac{\pi}{4}) = 1$.

15. Ein Auto fährt mit 126 km/h zum Zeitpunkt $t = 0$. Durch einen Bremsvorgang wird die Geschwindigkeit verringert. Die (negative) Beschleunigung $a(t)$ in $[m/s^2]$ wird dabei bis zum Zeitpunkt t_1 mit $a(t_1) = 0$ annähernd durch die Funktion

    $$a(t) = \frac{4}{9}t^2 - \frac{8}{3}t$$

    beschrieben. Beantworten Sie folgende Fragen:
    (a) Wann wird am stärksten abgebremst?
    (b) Stellen Sie eine Gleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ auf.
    (c) Wie lange dauert der Bremsvorgang und wie schnell fährt das Auto am Ende der Bremsung?
    (d) Welchen Weg legt das Auto während des Bremsvorganges zurück?