

Fachspezifische Software

in der mathematischen Lehre und Forschung

Karl Josef Fuchs

Einführung in das Mathematikstudium
und dessen Umfeld (Unterrichtsfach)

WS 2018/19 – 20.11.2018

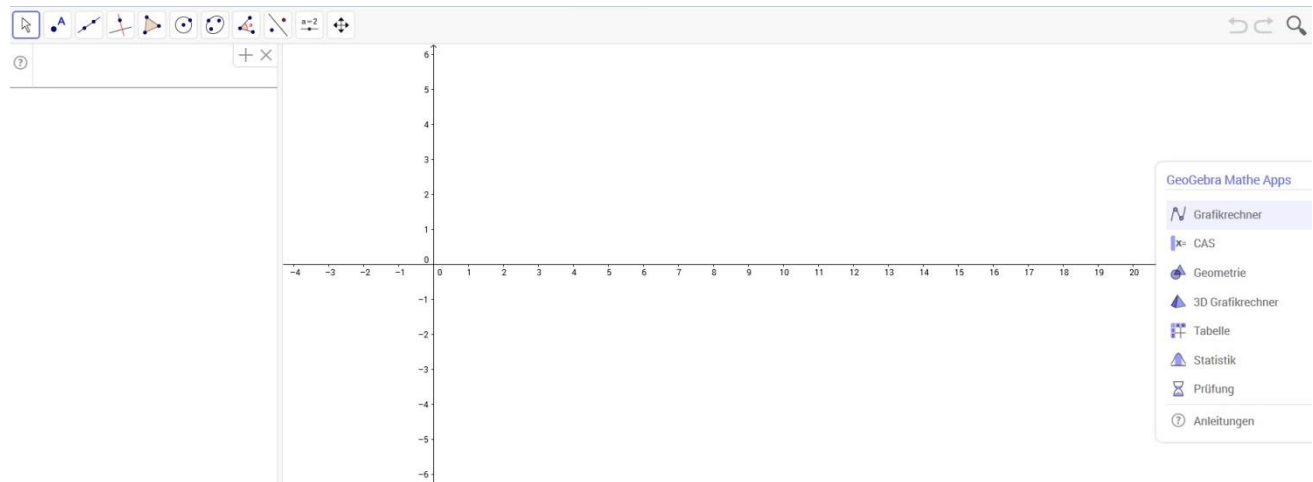


Universalwerkzeug GeoGebra

Universalwerkzeug GeoGebra

(entwickelt von Markus Hohenwarter an der PLUS – Betreuer der Diplomarbeit und Dissertation K.J. Fuchs)

DGS (Dynamisches Geometriesystem & Algebra). Die Methode der *Mehr-fenster-technik* öffnet den Zugang zu den Themen CAS, Stochastik, Spreadsheet



Universalwerkzeug GeoGebra

Ein **dynamisches Geometrie-System (DGS)** ist ein Computerprogramm zur Realisierung einer "beweglichen Geometrie".

Die folgenden Fähigkeiten/Funktionen charakterisieren ein DGS.

Zugmodus/Funktionale Abhängigkeit: Diese Fähigkeit ermöglicht die Erstellung von dynamischen geometrischen Konstruktionen, in denen unabhängige (die sogenannten "freien Punkte") nachträglich verschoben werden können, ohne dass dabei bei der Erstellung der Konstruktion festgelegte Zusammenhänge (Invarianten) zwischen den geometrischen Objekten verloren gehen.

Ortslinien/Spurmodus: Aufgrund der Beweglichkeit mancher Basispunkte ist es möglich, Ortslinien anderer Punkte aufzuzeichnen.

Eine dritte Option, die jedoch nicht typisch für ein DGS ist, ist der **Einsatz von Makros**. Makros sind Kennzeichen guter Anwendungsprogramme. Sie ermöglichen das Speichern und beliebiges Wiederholen einzelner Konstruktionsschritte.

Universalwerkzeug GeoGebra

Funktionale Abhängigkeit/Zugmodus:

Aspekt 1: Der *Zuordnungscharakter* einer Funktion

Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.

Aspekt 2: Funktionen repräsentieren einen *Veränderungscharakter*

Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.

Universalwerkzeug GeoGebra

Zugmodus / Funktionale Abhängigkeit:

Der *Zuordnungscharakter* einer Funktion

Sekundarstufe I: *Aufgabe Form des Dreiecks – Lage des Umkreismittelpunkts*

Sekundarstufe II: *Prototypen einer quadratischen Funktion – Facette Ableiten und Generieren von prototypischen Formen reeller Funktionsklassen (ANALYSIS)*

Kegelschnitte-Sekundarstufe I (konstruktiv) bzw. Sekundarstufe II (nichtlineare Analytische Geometrie): *Tangente Ellipse - Brennstrahlen*

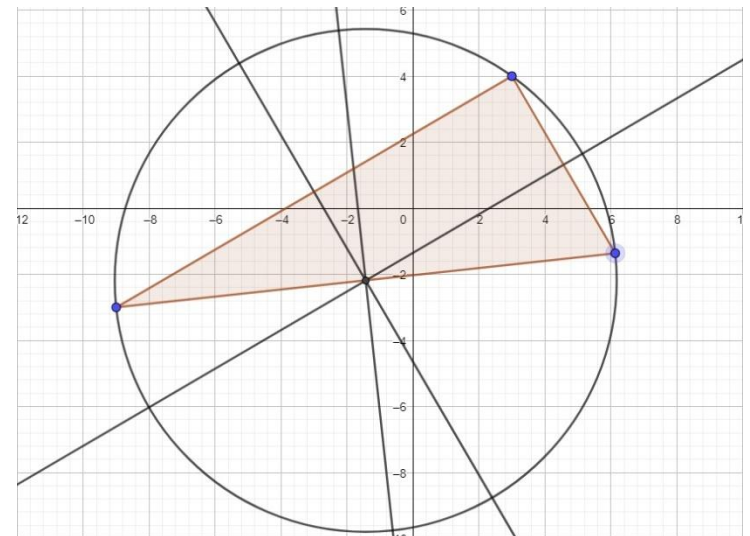
Universalwerkzeug GeoGebra

Zugmodus/Funktionale Abhängigkeit:

Beispiel: Form des Dreiecks – Lage des Umkreismittelpunkts

Methodisch ist in den Aufgaben zum Zugmodus die Nutzung der bereits eingangs erwähnten *Mehrfenstertechnik* angebracht, d.h. Nutzung des Fensters mit dem Konstruktionsprotokoll.

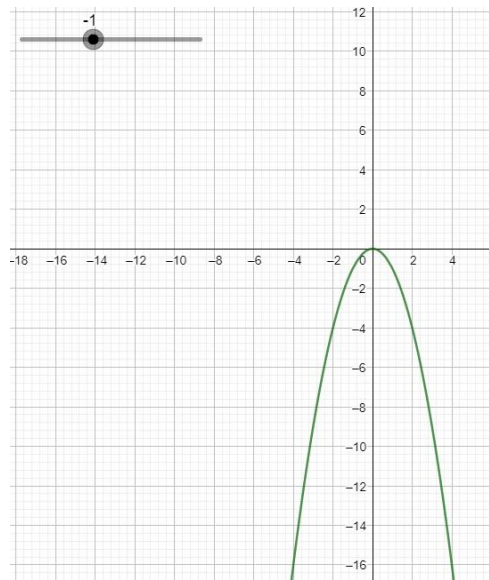
#	Name	Beschreibung	Wert	Beschriftung
1	Punkt A		A = (-9, -3)	
2	Punkt B		B = (3, 4)	
3	Punkt C		C = (6.13, -1.36)	
4	Dreieck d1	Polygon A, B, C	d1 = 43.14	
4	Strecke c	Strecke A, B	c = 13.89	
4	Strecke a	Strecke B, C	a = 6.21	
4	Strecke b	Strecke C, A	b = 15.22	
5	Gerade f	Mittelsenkrechte	f: $15.13x + 1.64y = -25.27$	
6	Gerade g	Mittelsenkrechte	g: $-3.13x + 5.36y = -7.23$	
7	Gerade h	Mittelsenkrechte	h: $-12x - 7y = 32.5$	
8	Punkt D	Schnittpfad von g, h	D = (-1.43, -2.19)	
9	Kreis d	Kreis durch B mit Mittelpunkt D	d: $(x + 1.43)^2 + (y + 2.19)^2 = 57.92$	



Universalwerkzeug GeoGebra

Zugmodus/Funktionale Abhängigkeit:

Beispiel: Prototypen einer quadratischen Funktion

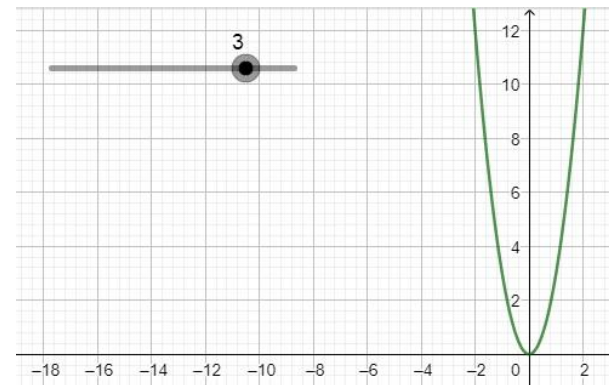


$a = -1$

-5 5

$f(x) = a x^2$

→ $-x^2$



$a = 3$

-5 5

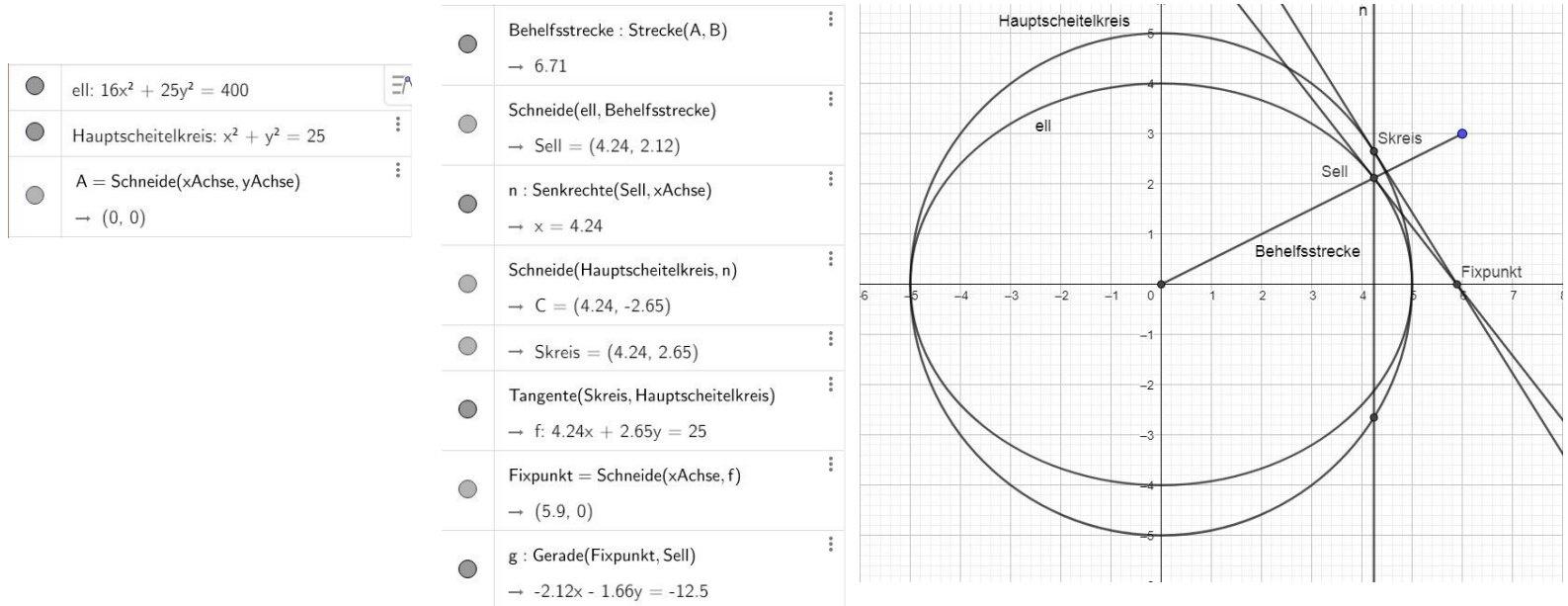
$f(x) = a x^2$

→ $3x^2$

Universalwerkzeug GeoGebra

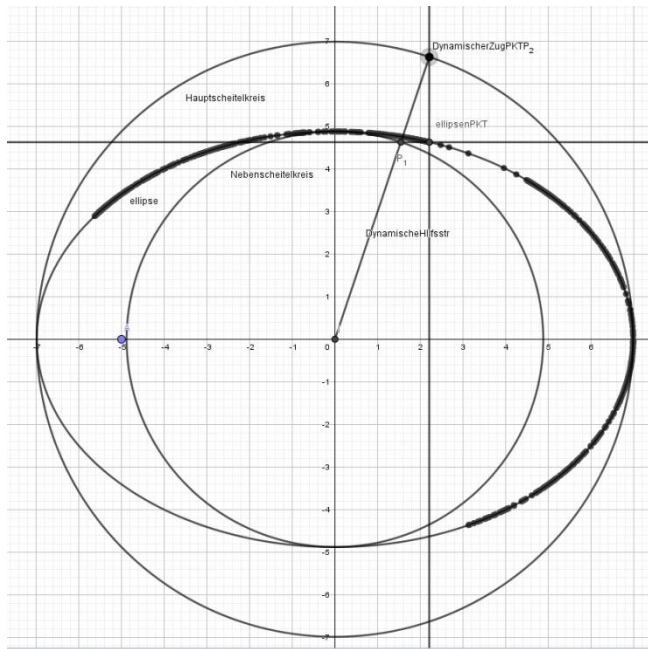
Zugmodus/Funktionale Abhängigkeit:

Methodisch ist in den Aufgaben zum Zugmodus die Nutzung der bereits eingangs erwähnten *Mehrfensterertechnik* angebracht, d.h. Nutzung des Algebra-Fensters (Symbolische Verallgemeinerung: CAS-Fenster).



Universalwerkzeug GeoGebra

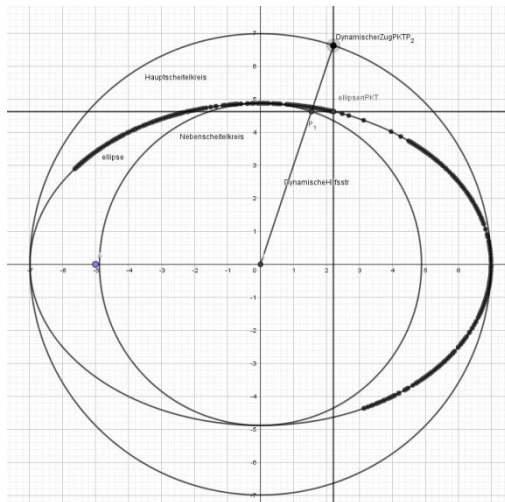
Ortslinien/Spurmodus: : Sekundarstufe I: *Affinität Kreis-Ellipse*



Nr.	Name	Beschreibung	Wert
1	Punkt A	Punkt auf xAchse	A = (-5, 0)
2	Punkt B	Punkt auf xAchse	B = (5, 0)
3	Punkt C		C = (4, 4)
4	Ellipse ell...	Ellipse mit Brennpunkten A,	ellipse: 380.86x²...
5	Punkt D	Schnittpfad von xAchse, yAchse	D = (0, 0)
6	Punkt E	Schnittpfad von ellipse, xAchse	E = (6.99, 0)
7	Kreis Ha...	Kreis durch E mit Mittelpunkt D	Hauptscheitelkr...
8	Punkt F	Schnittpfad von ellipse, yAchse	F = (0, 4.88)
9	Kreis Ne...	Kreis durch F mit Mittelpunkt D	Nebenscheitelkr...
10	Punkt G		G = (10, 6)
11	Punkt H	Schnittpfad von xAchse, yAchse	H = (0, 0)
12	Punkt I	Schnittpfad von xAchse, yAchse	I = (0, 0)
13	Punkt Dynamisch	Punkt auf Hauptscheitelkreis	DynamischerZugP = (2.21, 6.63)
14	Strecke D...	Strecke I, DynamischerZugP	DynamischeHilf...
15	Punkt P ₁	Schnittpunkt von Nebenscheitelkrei:	P ₁ = (1.54, 4.63)
16	Gerade f	Gerade durch P ₁ parallel zu xAchse	f: y = 4.63
17	Gerade g	Gerade durch DynamischerZugP	g: x = 2.21
18	Punkt ell...	Schnittpfad von f, g	ellipsenPKT = (2...

Universalwerkzeug GeoGebra

Ortslinien/Spurmodus: (Symbolische Verallgemeinerung: CAS-Fenster) Sekundarstufe I: *Affinität Kreis-Ellipse*- Symbolische Verallgemeinerung



CAS	
1	ell: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ → ell : $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$
2	HSK: $x^2 + y^2 = a^2$ → HSK : $x^2 + y^2 = a^2$
3	NSK: $x^2 + y^2 = b^2$ → NSK : $x^2 + y^2 = b^2$
4	c: $y = kx$ → c : $y = kx$
5	Schneide(HSK, c) → $\left\{ \left(\sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{a}{k^2 + 1}, k \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{a}{k^2 + 1} \right), \left(-\sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{a}{k^2 + 1}, -k \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{a}{k^2 + 1} \right) \right\}$
6	Schneide(NSK, c) → $\left\{ \left(\sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{b}{k^2 + 1}, k \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{b}{k^2 + 1} \right), \left(-\sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{b}{k^2 + 1}, -k \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{b}{k^2 + 1} \right) \right\}$
7	$p1: x = \sqrt{a^2(k^2 + 1)}$ → p1 : $x = \frac{a}{\sqrt{k^2 + 1}}$
8	$p2: y = k \sqrt{a^2(k^2 + 1)}$ → p2 : $y = b \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$
9	ellPKT: $(a/\sqrt{k^2 + 1}, b*k/\sqrt{k^2 + 1})$ → ellPKT := $\left(\frac{a}{\sqrt{k^2 + 1}}, \frac{b*k}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)$
10	Ersetze $(b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, (x = a/\sqrt{k^2 + 1}, y = b*k/\sqrt{k^2 + 1}))$ → $a^2 b^2 = a^2 b^2$

Psychologische Paradigmen

KONSTRUKTIVISMUS: Lernen wird als aktiver Konstruktionsprozess, in dem jeder Lernende eine individuelle Repräsentation der Welt erschafft, verstanden. Jedes Individuum erzeugt anhand Experiment eine **subjektive Realität**.

KONSTRUKTIONISMUS: Individuen konstruieren mentale Modelle (= Module/Mikrowelten), um die Welt zu verstehen.

Papert, S. /LOGO 20. Jht./Resnick, M./SCRATCH oder Hartmann, W. KARA-21. Jht. Besonders wichtig dabei sind die ‚Berührung‘ mit Objekten der realen Welt (LOGO:Turtle-Zeichenstift; SCRATCH: verschiedene Objekte, deren Eigenschaften man definiert, KARA: ‚Käfer‘, den man durch eine Rasterwelt steuert und der gewisse Tätigkeiten vollführen kann.

Eng verwandt mit dem Konstruktivismus in der Struktur ist das sogenannte PBL (Problem Based Learning-dreistufig: (1) Formulierung des Problems/(2) Auseinandersetzung (Operieren)/(3) Wohlbegründete Argumentation).

Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Spreadsheet/Tabellenkalkulation  Tabelle

Iterative Prozesse

A. Die Iteration der Quadratischen Funktion

B. Das iterative Wurzelziehen

Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Spreadsheet/Tabellenkalkulation



A: Die Iteration der Quadratischen Funktion

$$f(x) := (1 + r) \cdot x - r \cdot x^2$$

$x_0 = 0.5$	$r = 1.8$	konvergent
	$r = 2.3$	2-er Zykel
	$r = 3$	divergent

konvergent

	A	B
1	0.5	1.8
2	0.95	
3	1.0355	
4	0.96933155	
5	1.0228417631	
6	0.9807874465	
7	1.0147056229	
8	0.9878462421	
9	1.0094571214	
10	0.992273316	
11	1.0060738842	
12	0.9950744869	
13	1.0038967413	
14	0.9968552747	
15	1.0024979795	
16	0.9979903846	
17	1.0016004229	
18	0.9987150512	
19	1.0010249871	
20	0.9991781193	

Universalwerkzeug GeoGebra

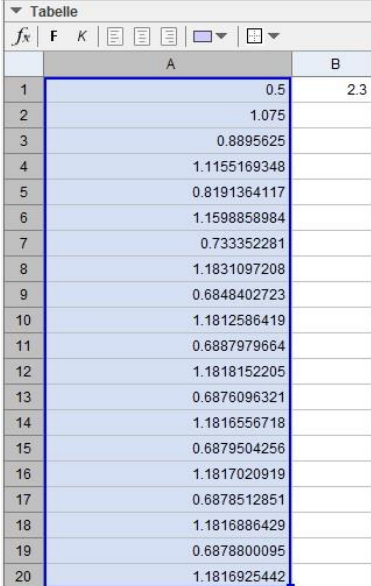
Thema: Spreadsheet/Tabellenkalkulation  Tabelle

A: Die Iteration der Quadratischen Funktion

$$f(x) := (1 + r) \cdot x - r \cdot x^2$$

$x_0 = 0.5$	$r = 1.8$	konvergent
	$r = 2.3$	2-er Zykel
	$r = 3$	divergent

2-er Zykel



	A	B
1	0.5	2.3
2	1.075	
3	0.8895625	
4	1.1155169348	
5	0.8191364117	
6	1.1598858984	
7	0.733352281	
8	1.1831097208	
9	0.6848402723	
10	1.1812586419	
11	0.6887979664	
12	1.1818152205	
13	0.6876096321	
14	1.1816556718	
15	0.6879504256	
16	1.1817020919	
17	0.6878512851	
18	1.1816886429	
19	0.6878800095	
20	1.1816925442	

Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Spreadsheet/Tabellenkalkulation



A: Die Iteration der Quadratischen Funktion $f(x) := (1 + r) \cdot x - r \cdot x^2$

$x_0 = 0.5$	$r = 1.8$	konvergent
	$r = 2.3$	2-er Zykel
	$r = 3$	divergent

divergent

	A
1	0.5
2	1.25
3	0.3125
4	0.95703125
5	1.0803985596
6	0.8198110957
7	1.2629736849
8	0.2665871534
9	0.8531424825
10	1.2290136436
11	0.3846309658
12	1.0947009237
13	0.7836933578
14	1.292247594
15	0.1592788434
16	0.5610061236
17	1.2998408823
18	0.1306045714
19	0.4712456234
20	1.2187651809

Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Spreadsheet/Tabellenkalkulation  Tabelle

*B: Das iterative Wurzelziehen
Quadratwurzel von A*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

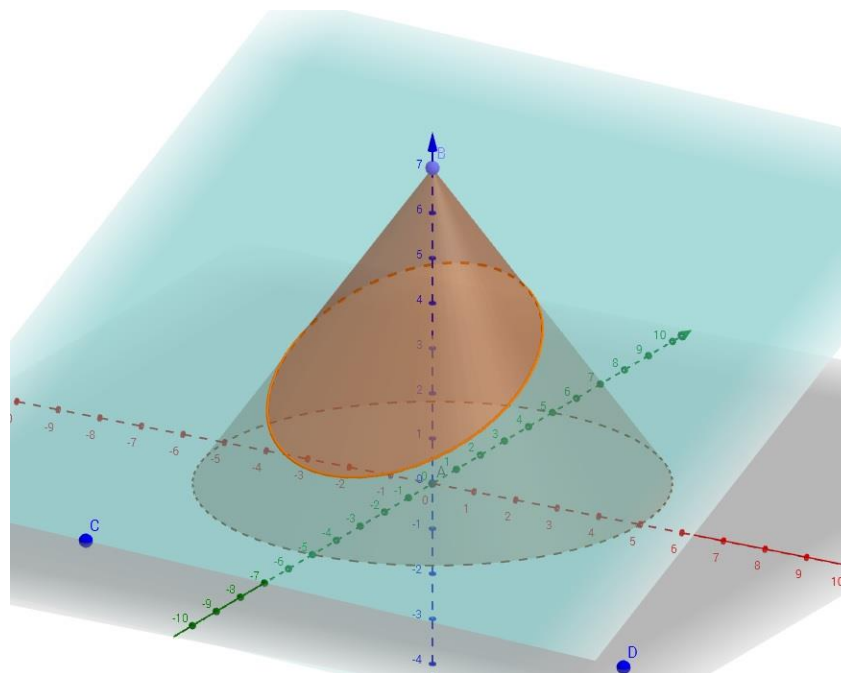
$A = 5$

	A	B
1	4	2.2360679775
2	2.625	
3	2.2648809524	
4	2.2362512515	
5	2.236067985	
6	2.2360679775	
7	2.2360679775	
8	2.2360679775	
9	2.2360679775	
10	2.2360679775	
11	2.2360679775	
12	2.2360679775	
13	2.2360679775	
14	2.2360679775	
15	2.2360679775	
16	2.2360679775	
17	2.2360679775	
18	2.2360679775	
19	2.2360679775	
20	2.2360679775	

Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Raumgeometrie  3D Grafikrechner

Schnitte eines Drehkegels



Universalwerkzeug GeoGebra

Thema: Stochastik-Wahrscheinlichkeitsrechner

Normalverteilung: *(Prozentsatz aller) Meßwerte mit (speziellen) Abweichungen vom Mittelwert*

