

Fachdidaktik und Symbolisches Rechnen (Computer Algebra Systeme-CAS)

Karl Josef Fuchs

Einführung in das Mathematikstudium
und dessen Umfeld (Unterrichtsfach)

WS 2018/19 – 6.11.2018



1. Das Mathematische Problem- Problemlösestrategien

Kategorien Mathematischer Probleme

- Beispiele, die *formales, systematisches, symbolisch-technisches* Arbeiten einfordern. [**Operieren, Begründen und Beweisen**]

prototypische Texte: * Löse die folgende Betragsungleichung:

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 2$$

- * Skizziere den prototypischen Verlauf des Graphen einer Polynomfunktion vom Grad 3.
 - * Ermittle die erste Ableitung von f mit $f(x) = x^x!$
- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext einfordern. [**Mathematisieren und Interpretieren**]

1. Das Mathematische Problem- Problemlösestrategien

Kategorien Mathematischer Probleme

prototypischer Text: * In der Mikroökonomie interessiert man sich für das Verhalten von Konsument(inn)en und entwirft dafür einfache Modelle. Man beschreibt dazu das Verhalten über lineare Funktionen, sogenannte *Angebots-* und *Nachfragefunktionen*. Die erste Aufgaben besteht etwa darin, aus einer Tabelle mit erhobenen Daten eine Gerade als Graph der gesuchten *Angebotsfunktion* ‚einzupassen‘. (nach Fuchs, KJ & Plangg, S. (2018). *Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung*. WTM Verlag: Münster.)

2. Technische Hilfsmittel zur Lösung mathematischer Probleme (CAS)

Wovon sprechen wir?

MATHEMATICA

MAPLE, MATHCAD

MAXIMA

REDUCE (GeoGebra)



2. Technische Hilfsmittel zur Lösung mathematischer Probleme (CAS)

Wovon sprechen wir?
Held Held Technologie:

TI NSPIRE CAS

CASIO CLASSPAD



3. Computer Algebra Systeme (CAS) - Charakterisierung

Zur Beantwortung der Frage ‚Was charakterisiert CAS?‘ greifen wir bei unseren Antworten auf die Autoren Winkler, F. et al¹⁾ (RISC), Davenport, J.H.²⁾ sowie Fuchs, KJ & Plangg, S. zurück.

- 1) *Softwaresystems for Symbol Manipulation*. 1990 Expert Verlag: Ehningen, S. 1ff)
- 2) Computer Algebra – past, present and future. *Euromath Bulletin* 1994, Vol. 1, No. 2, S. 25 -44)
- 3) *Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung*. WTM Verlag: Münster

3. Computer Algebra Systeme (CAS) - Charakterisierung

Antwort #1:

- Lösen von Gleichungen / Gleichungssystemen mit Formvariablen

In[3]:= `Solve[a * x^2 + b * x + c == 0, x]`

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right\}$$

In[5]:= `Solve[{a1 * x + b1 * y == c1, a2 * x + b2 * y == c2}, {x, y}]`

$$\text{Out[5]} = \left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, y \rightarrow -\frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right\} \right\}$$

3. Computer Algebra Systeme (CAS) - Charakterisierung

Antwort #2:

- Auffinden geschlossener Formeln für Summen und Produkte

In[6]:= `Sum[i, {i, 1, n}]`

Out[6]= $\frac{1}{2} n (1 + n)$

$$\prod_{k=1}^n (2 \cdot k)$$

$$n! \cdot 2^n$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2 \cdot k)$$

$$2 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot 2^n$$

3. Computer Algebra Systeme (CAS) - Charakterisierung

Antwort #3:

- Integration gebrochen rationaler Funktionen

```
In[13]:= Apart[2 * x / (x^2 - 1)]
```

```
Out[13]=
```

$$\frac{1}{-1 + x} + \frac{1}{1 + x}$$

```
In[9]:= Integrate[2 * x / (x^2 - 1), x]
```

```
Out[9]= Log[-1 + x^2]
```

3. Computer Algebra Systeme (CAS) - Charakterisierung

Antwort #4:

- Verwendung von Symbolen (engl. Symbolic Computation)

$$\text{In[32]:= } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[32]= } \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\}$$

$$\text{In[31]:= } \int \frac{2 * x}{x^2 - 1} dx$$

$$\text{Out[31]= } \text{Log}[-1 + x^2]$$

3. Computer Algebra Systeme- Charakterisierung

Antwort #5:

- Veranschaulichen - Beweisen

$\triangleleft \left(\frac{p}{q} = \sqrt{2}\right)^2$	$\frac{p^2}{q^2} = 2$
$\triangleleft \left(\frac{p^2}{q^2} = 2\right) \cdot q^2$	$p^2 = 2 \cdot q^2$
$p^2 = 2 \cdot q^2 \mid p = 2 \cdot k$	$4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2$
$\frac{4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2}{2}$	$2 \cdot k^2 = q^2$

4. CAS als Rechen- (Darstellungshilfe)

Zur Illustration des Arbeitens mit Technologie knüpfen wir an die eingangs formulierten Aufgabentypen an:

- Beispiele, die *formales, systematisches, symbolisch-technisches* Arbeiten einfordern. [**Operieren, Begründen und Beweisen**]

prototypische Texte:

* Löse die folgende Betragsungleichung:

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 2$$

* Skizziere den prototypischen Verlauf des Graphen einer Polynomfunktion vom Grad 3.

* Ermittle die erste Ableitung von f mit $f(x) = x^x!$

4. CAS als Rechen- (Darstellungshilfe)

Option 1: Operieren [Methodisches Konzept des Black Box Verfahren]

$$\text{solve}(|x+1|+|x-1|\leq 2, x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

Ableitung(x^x, x)

$$\rightarrow x^x + x^x \ln(x)$$

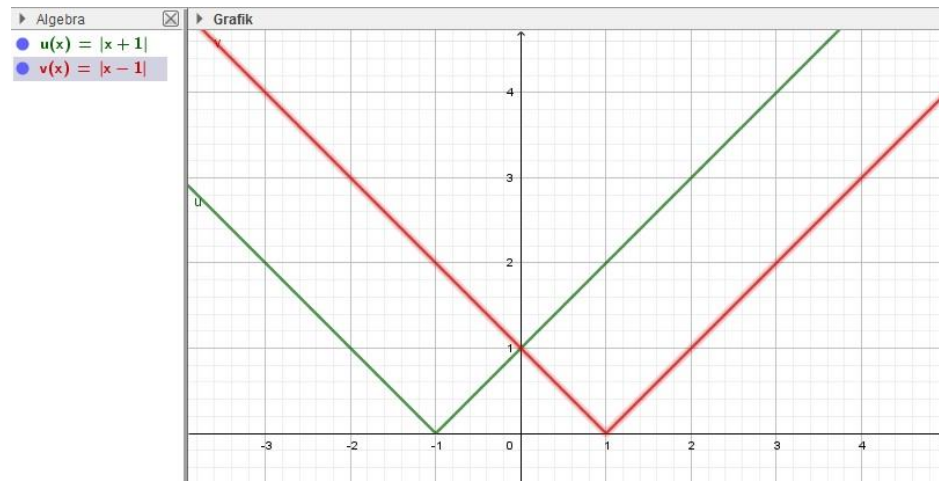
Option 2: Begründen [Methodisches Konzept des White Box Verfahrens]

A: Begründung (formal) durch Fallunterscheidungen (s. Skriptum Schulstoff I-Kapitel 2.4).

B: Begründung durch Wechsel der Repräsentationsform unter Verwendung der Graphen der beiden Funktionen u und v mit $u(x) := |x + 1|$ und $v(x) := |x - 1|$!

4. CAS als Rechen- (Darstellungshilfe)

Option 2: Begründung durch Wechsel der Repräsentationsform



Begründung der Lösung des CAS für die erste Ableitung von f mit $f(x) = x^x$ durch **Umdefinieren** [Fundamentale Idee/Strategie der Mathematik]:

$$x^x := e^{x \cdot \ln(x)}.$$

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext einfordern. [**Mathematisieren** und **Interpretieren**]

Zur näherungsweise Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.

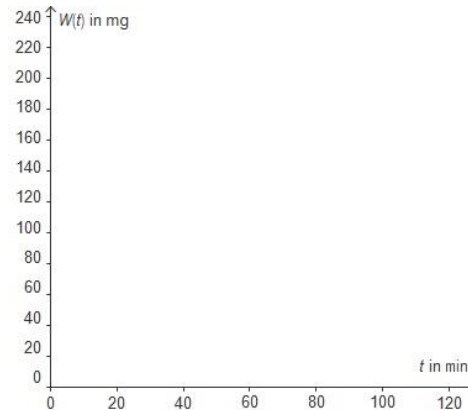
Zu Beginn ($t = 0$ min) sind 200 mg des Wirkstoffs im Blut, nach 120 Minuten ist nur noch ein Achtel dieser Menge vorhanden.

– *Veranschaulichen Sie den Verlauf des linearen Modells im nachstehenden Diagramm.*

(Quelle: http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/Pich_HT-2016_B9-10-C1C5_Medikamentenabbau.pdf - aufgerufen am 30.10.2018)

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

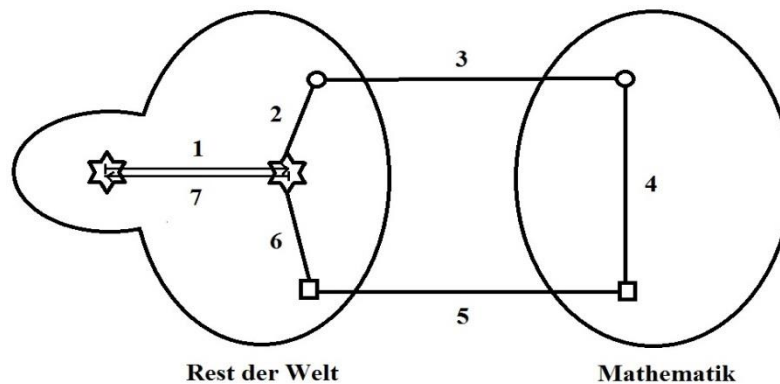
- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext einfordern.



- *Ermitteln Sie die Halbwertszeit desjenigen exponentiellen Modells (, das diesen Abbau beschreibt, in Minuten.*
- *Veranschaulichen Sie den Verlauf des exponentiellen Modells unter Verwendung der ermittelten Halbwertszeit im obigen Diagramm.*
- *Erklären Sie, für welches der beiden Modelle zu jedem Zeitpunkt gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{35}{24}$.*

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

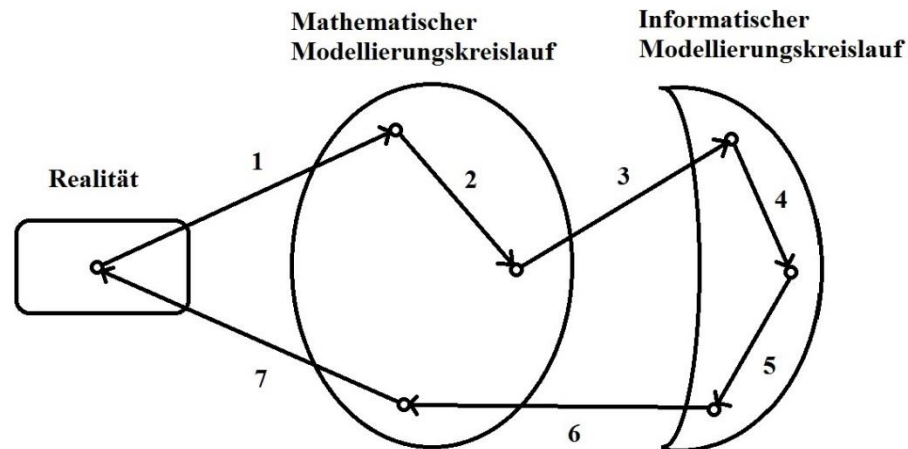
Modellierungskonzepte (-kreisläufe)-Fachdidaktik Mathematik
Modellierungsschema von Leiß und Blum



#	Quelle	Ziel
1	Realsituation	Situationsmodell
2	Situationsmodell	Reales Modell/Problem
3	Reales Modell/Problem	Math. Modell/Problem
4	Math. Modell/Problem	Mathematische Resultate
5	Mathematische Resultate	Reale Resultate
6	Reale Resultate	Situationsmodell
7	Situationsmodell	Realsituation

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

Modellierungskonzepte (-kreisläufe)-Fachdidaktik Mathematik
Modellierungsschema von Siller



#	Quelle	Ziel
1	Problem	Design & Entwicklung
2	Design & Entwicklung (M)	Beschreibung
3	Beschreibung	Design und Entwicklung (INF)
4	Design & Entwicklung (INF)	Implementierung
5	Implementierung	Evaluation (INF)
6	Evaluation (INF)	Evaluation (M)
7	Evaluation (M)	Problem

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext einfordern.

Wozu Technologie?

Zur näherungsweise Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.

Zu Beginn ($t = 0$ min) sind 200 mg des Wirkstoffs im Blut, nach 120 Minuten ist nur noch ein Achtel dieser Menge vorhanden.

– Veranschaulichen Sie den Verlauf des linearen Modells im nachstehenden Diagramm.

- Ermitteln Sie die Halbwertszeit desjenigen exponentiellen Modells, das diesen Abbau beschreibt, in Minuten.

– Veranschaulichen Sie den Verlauf des exponentiellen Modells unter Verwendung der ermittelten Halbwertszeit im obigen Diagramm.

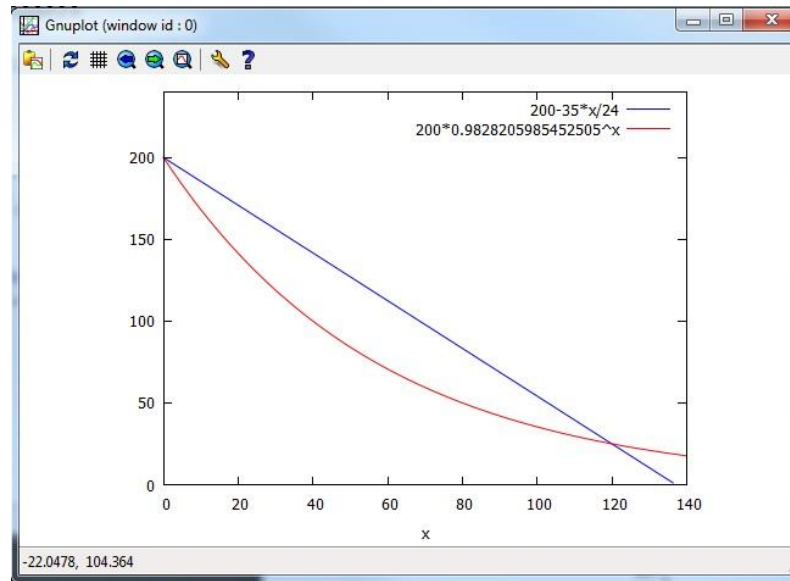
[Schritte: Übersetzen eines Realmodells mathematische Modelle (= Mathematische Funktionen-linear bzw. exponentiell)-**Mathematisieren** und **Interpretieren**]

4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext erfordern.

Wozu Technologie?

Zur näherungsweisen Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.



4. CAS als Technologisches Hilfsmittel beim Modellieren

- *Modellierungsaufgaben*, die das Anwenden von Mathematik in einem realen Kontext einfordern.

Wozu Technologie?

– Erklären Sie, für welches der beiden Modelle zu jedem Zeitpunkt gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{35}{24}$.

Ein Blick auf unsere definierten Funktionen zeigt uns, dass die Steigung der linearen Funktion den gesuchten, angegebenen Wert besitzt:

$$f_1(t) := \frac{-35}{24}t + 200$$