Endliche Körper und Codierung

Übung, LVA 405.351
C. Fuchs

5. Übungsblatt, WS 2018/19 — 14.11.2018

1. Sei p eine Primzahl. Man zeige:
   a) $\binom{p}{j} \equiv 0 \bmod p$ für alle $1 \leq j \leq p-1$,
   b) $\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \bmod p$ für alle $1 \leq j \leq p-1$,
   c) für alle $\alpha, \beta \in K$ mit $\mathrm{char} K = p$ gilt
   $$(\alpha+\beta)^{p^k} = \alpha^{p^k} + \beta^{p^k}$$
   für alle $k \geq 0$.

   Verifziere damit die relevanten Details des Beweises von Satz 2.22.

2. Konstruiere die endlichen Körper $\mathbb{F}_{27}$ und $\mathbb{F}_{25}$. Bestimme dazu jeweils ein irreduzibles Polynom und gib dann die Liste der Elemente an. Bestimme außerdem ein primitives Element γ für die jeweilige multiplikative Gruppe und schreibe alle Elemente des Körpers als Potenzen von γ.

3. Beantworte:
   a) Zeige, daß über $\mathbb{F}_2$ das Polynom $g(x) = 1 + x$ den $[n+1, n]$-Parity-Check-Code erzeugt.
   b) Der binäre $[4, 1]$-Wiederholungscode wird durch ein Polynom erzeugt. Welches?

4. Zeige, daß jeder Polynomcode über $\mathbb{F}_q$ ein Linearcode ist.