Algebra I

LVA 405.090

C. Fuchs
Inhaltsübersicht **28.01.2019**

Inhaltsübersicht

In dieser einführenden Lehrveranstaltung wird ein erster Einblick in die Algebra gegeben. Was versteht man unter einer algebraischen Struktur? Welche wichtige Strukturen gibt es? Wir werden im Detail die Theorie der Gruppen behandeln, sowie einige Aspekte über Ringe kennenlernen (bzw. wiederholen). Die Vorlesung endet mit Körpern. Weitere Aspekte der Algebra werden kommendes Sommersemester in "Algebra II" sowie der Wahlvorlesung "Universelle Algebra" behandelt. Parallel zur LV findet im Wintersemester "Endliche Körper und Codierung" statt, welche parallel besucht werden kann und wo es um eine wichtige Anwendung der Algebra geht.

Die Vorlesung behandelt (voraussichtlich) die folgenden Themen:

§0. Motivation

§1. Gruppen

§2. Ringe

§3. Körper

Bei Fragen oder Bemerkungen (speziell Hinweise auf Fehler aller Art sind willkommen) schicken Sie ein Email an clemens.fuchs@sbg.ac.at.

§0. Motivation

0.1 Gleichungen in der Algebra

0.2 Algebraisierung der Geometrie

0.3 Binäre Operationen

0.4 Universelle Algebren
Beispiele

0.5 Halbgruppe, Monoid, Verband

§1. Gruppen

1.1 Grundlagen

1.1.1 Grundlagen

1.1.2 **Satz** Eigenschaften

1.1.3 Ordnung und Exponent

1.2 Untergruppen, Homomorphismen und direkte Produkte

1.2.1 Untergruppen und Untergruppenkriterium
Beispiele

1.2.2 Beispiele (inklusive zyklische Untergruppe, erzeugte Untergruppe, Durchschnitt von Untergruppen, etc.)

1.2.3 Homorphismen mit Eigenschaften, Kern und Bild, Injektivität

1.2.4 direktes Produkt von Gruppen

1.2.5 kanonische Projektionen und Einbettungen

1.2.6 direkte Summe

1.2.7 Homomorphismen

1.2.8 **Satz** (universelle Eigenschaft des direkten Produkts)

1.2.9 **Satz** (universelle Eigenschaft der direkten Summe)

1.2.10 interne vs. externe direkte Summe

1.3 Aktionen

1.3.1 Definition
Beispiele

1.3.2 Symmetrische Darstellung

1.3.3 Adjungierte Darstellung, innere Automorphismen, Zentrum einer Gruppe

1.3.4 Links/Rechts-reguläre (symmetrische) Darstellung, Darstellungssatz von Cayley

1.3.5 Bahn/Orbit/Nebenklasse, (allgemeine) Nebenklassenzerlegung, Stabilisator/Zentralisator

1.3.6 Begriffe für beliebige Teilmengen (Normalisator, Zentralisator)

1.3.7 **Satz** a) Bahnen sind identisch oder disjunkt, b) Stabilisatoruntergruppe

1.3.8 Repräsentantensystem, M/G

1.3.9 Operation einer Untergruppe H auf einer Gruppe G durch Links/Rechtsmultiplikation, Nebenklassenzerlegung, Index $(G : H)$

1.3.10 **Satz** $(G : K) = (G : H)(H : K)$ und $|G| = (G : H)|H|$

1.4 Normalteiler, Faktorgruppen und Isomorphiesätze

1.4.1 Motivation Faktorgruppe

1.4.2 Normalteiler und Faktorgruppe
Beispiele

1.4.3 Kern eines Homomorphismus ist ein Normalteiler und umgekehrt

1.4.4 **Satz** (Homomorphiesatz)

1.4.5 **Erster** Isomorphiesatz

1.4.5 **Zweiter** Isomorphiesatz

1.4.6 **Dritter** Isomorphiesatz

1.5 Zyklische Gruppen

1.5.1 Zyklische Gruppen

1.5.2 Satz Klassifikation der zyklischen Gruppen, endlich/unendlich zyklisch

1.5.3 Satz Satz von Lagrange

1.5.5 Satz Eigenschaften: Homomorphe Bilder und Untergruppen zyklischer Gruppen sind zyklisch, direkte Produkte von zyklischen Gruppen i.A. nicht (vlg. Chinesischer Restsatz)

1.5.4 primitives Element

1.5.6 Satz Erzeuger, Anzahl der Erzeuger

1.6 Der Satz von Sylow

1.6.1 Bahngleichung

1.6.2 Orbitzerlegungsformel

1.6.3 Klassengleichung

1.6.4 **Satz** G endliche, dann teilt der Exponent die Gruppenordnung

1.6.5 **Satz** G endlich, abelsch $\Rightarrow |G|$ teilt eine Potenz des Exponenten

1.6.6 **Satz** G endlich, abelsch und p ein Primteiler von $G \Rightarrow G$ besitzt einer Untergruppe mit p Elementen
1.6.7 Definition der Sylow-Untergruppen

1.6.8 1. **Sylow-Satz** G endlich und p^k teilt $|G| \Rightarrow G$ besitzt eine UG mit p^k Elementen (insbesondere besitzt G eine p-Sylow-Untergruppe)

1.6.9 2. **Sylow-Satz**

1.7 Einfache und auflösbare Gruppen

1.7.1 Normalreihe, Länge, Faktoren
Beispiele

1.7.2 Verlängerung einer Normalreihe

1.7.3 einfach, Kompositionsreihe

1.7.4 auflösbar
Beispiele

1.7.5 Es gilt: a) Unterguppen auflösbarer Gruppen..., b) homomorphe Bilder auflösbarer Gruppen..., c) Erweiterungen auflösbarer Gruppe...sind auflösbar.

1.7.6 $\mathscr{A}_5$ ist einfach und nicht-abelsch, $\mathscr{S}_5$ ist nicht auflösbar

§2. Ringe

2.1 Grundlagen

2.1.1 Ringe
Beispiele

2.1.2 Eigenschaften

2.1.3 Einheiten, Schiefkörper, Körper
Beispiele

2.2 Homomorphismen und Unterringe

2.2.1 Unterring

2.2.2 Ringhomomorphismus

2.2.3 Primring

2.2.4 Charakteristik

2.2.5 Frobenius in komm. Ringen mit Primzahlcharakteristik

2.3 Produkte von Ringen

2.3.1 Produkte von Ringen

2.3.2 orthogonal, zentral, idempotent

2.3.3 **Satz** Sei R ein unitärer Ring. R ist genau dann isomorph zum direkten Produkt unitärer Ringe, falls das Einselement eine Zerlegung in eine Summe von paarweise orthogonalen zentralen Idempotenten besitzt.

2.4 Ideale und Faktorringe

2.4.1 Ideale
Beispiele: a) $\mathbb{Z}$, b) Kern eines Ringhomomorphismus, c) Hauptideale

2.4.2 Faktorring

2.4.3 **Satz** (Homomorphiesatz für Ringe)
Beispiel: Restklassenringe

2.4.4 Bemerkungen: a) Isomorphiesätze, b) Ideale von R, welche I enthalten, und die Ideale von R/I, c) Idealarithmetik: Summe, Produkt und Durchschnitt von Idealen

2.5 Faktorielle Ringe, Hauptidealringe und euklidische Ringe

2.5.1 Nullteiler, nullteilerfrei, Integritätsbereich

2.5.2 Teiler, Einheit, assoziiert, gemeinsamer Teiler, ggT

2.5.3 irreduzibel, prim

2.5.4 prim $\Rightarrow$ irreduzibel, Umkehrung gilt i.A. nicht

2.5.5 faktoriellere Ringe

2.5.6 Zerlegung in irreduzible Elemente

2.5.7 **Satz**

2.5.8 Hauptideale, ggT

2.5.9 **Satz** Hauptidealringe sind faktorielle Ringe
Beispiele: a) $\mathbb{Z}[i]$, b) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

2.5.10 euklidische Ringe, euklidische Ringe sind Hauptidealring und daher faktoriell
Beispiele: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i]$

2.6 Ideale in kommutativen Ringen

2.6.1 Primideale
Beispiele: Primideale in $\mathbb{Z}$
Beispiele: a) $p \neq 0$ ist prim $\Leftrightarrow$ (p) ist ein Primideal, b) $\{0\}$ ist Primideal $\Leftrightarrow$ R ist nullteilerfrei

2.6.2 **Satz** R/I ist ein Integritätsbereich $\Leftrightarrow$ I ist Primideal.

2.6.3 Maximale Ideale
Beispiele

2.6.4 **Satz** 1. Ein Ring R ist ein Körper $\Leftrightarrow$ R besitzt nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und R. 2. R/I ist ein Körper $\Leftrightarrow$ I ist maximal.
Beispiel: maximale Ideale sind Primideale

2.6.5 Mit dem Lemma von Zorn folgt: Jedes Ideal $\neq R$ in $R \neq \{0\}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.

2.6.6 **Chinesischer** Restsatz $R/(I_1 \cap \cdots \cap I_k) \cong (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_k)$.
Beispiel

Literatur

1. G. Wüstholz, Algebra, Springer Spektrum, 2013
2. D. Lorenzini, An Invitation to Arithemtic Geometry, AMS, 1997
3. T.W. Hungerford, Algebra, Springer, 1984
4. S. Lang, Algebra, Reading, 1993
5. B.L. van der Waerden, Algebra I und II, Springer, 1993