

Algebra I

LVA 405.090

C. Fuchs

Prüfungsinformationen und -katalog, WS 2018/19

28.01.2019

Die Vorlesungsprüfung ist mündlich (ca. 30 Minuten) und richtet sich nach dem Vorlesungsstoff. Es sollten die wichtigsten Resultate aus der Vorlesung wiedergegeben werden können. Ausserdem sollte man, die in diesen Sätzen auftretenden Begriffe erklären, sowie die wichtigsten Beweisideen angeben können.

Hier eine Liste von möglichen Prüfungsfragen aufgelistet in der Reihenfolge der zugehörigen Kapitel:

1. Wie lautet die Lösungsformel von Cardano-Tartaglia (inklusive Herleitung)?
2. Wie lautet die Lösungsformel von Ferrari (inklusive Herleitung)?
3. Was versteht man unter einer Operation?
4. Was ist eine universelle Algebra? Was versteht man unter dem Typ?
5. Nenne Beispiele für universelle Algebren.
6. Was ist eine Gruppe? Nenne Beispiele.
7. Was ist die Diedergruppe?
8. Welche Eigenschaften gelten in Gruppen? Beweis?
9. Was versteht man unter der Ordnung eines Elements? Was ist die Gruppenordnung?
10. Was ist der Exponent einer Gruppe?
11. Was versteht man unter einer Untergruppe?
12. Nenne einige wichtige Beispiele für Untergruppen.
13. Was versteht man unter einem Homomorphismus? Nenne (und beweise) wichtige Eigenschaften.
14. Wie ist das externe direkte Produkt definiert?
15. Was ist die externe direkte Summe von Gruppen?
16. Was sind die kanonischen Projektionen bzw. Einbettungen?
17. Wie lautet die universelle Eigenschaft des direkten Produktes. Beweis?
18. Wie lautet die universelle Eigenschaft der direkten Summe. Beweis?
19. Was versteht man unter der internen direkten Summe?
20. Was ist eine Aktion?
21. Was ist eine symmetrische Darstellung?

22. Wie hängen Aktionen und symmetrische Darstellungen zusammen?
23. Was ist die adjungierte Darstellung?
24. Was ist die links/rechtsreguläre Darstellung?
25. Wie lautet der Darstellungssatz von Cayley?
26. Erkläre die Begriffe Bahn/Orbit/Nebenklasse, Stabilisator, Zentralisator, Normalisator.
27. Was versteht man unter der Nebenklassenzerlegung?
28. Was versteht man unter der Nebenklassenzerlegung einer Gruppe nach einer Untergruppe? Was ist der Index?
29. Formuliere und beweise den Produktsatz über Indizes.
30. Wann heißt eine Untergruppe normal? Was bedeutet Normalität?
31. Wie ist die Faktorgruppe definiert? Zeige, dass es sich dabei um eine wohldefinierte Gruppenstruktur handelt.
32. Charakterisiere normale Untergruppen.
33. Formuliere und beweise den Homomorphiesatz.
34. Formuliere und beweise den Ersten/Zweiten/Dritten Isomorphiesatz.
35. Wann heißt eine Gruppe zyklisch?
36. Wie sehen alle zyklischen Gruppen aus (Klassifikation) und warum?
37. Gib Eigenschaften von zyklischen Gruppen.
38. Wieviele Erzeuger gibt es in einer endlichen zyklischen Gruppe?
39. Formuliere und beweise den Satz von Lagrange.
40. Formuliere und beweise die Bahngleichung.
41. Wie lautet die Orbitzerlegungsformel?
42. Wie lautet die Klassengleichung?
43. Wie stehen Exponent und Ordnung zueinander (inklusive Beweis)?
44. Was versteht man unter einer p -Gruppe? Was ist eine p -Sylow-Untergruppe?
45. Wie lauten die Sylowschen Sätze?
46. Beweise den 1. Sylowschen Satz.
47. Beweise den 2. Sylowschen Satz.
48. Was versteht man unter einer Normalreihe einer endlichen Gruppe? Was ist die Länge, was die Faktoren?
49. Wie kann eine Normalreihe "verlängert" werden?

50. Wann heißt eine Gruppe einfach?
51. Was versteht man unter einer Kompositionsreihe?
52. Wann heißt eine Gruppe auflösbar?
53. Gib mindestens fünf Beispiele für auflösbare Gruppen.
54. Zeige, dass \mathcal{A}_5 einfach und nicht-abelsch und daher \mathcal{S}_5 nicht auflösbar ist.
55. Was ist ein Ring?
56. Gib einige Beispiele für Ringe.
57. Gib Eigenschaften von Ringen an.
58. Erkläre die Begriffe Einheit, Schiefkörper, Körper.
59. Was versteht man unter einem (unitären) Unterring?
60. Was versteht man unter einem (unitären) Ringhomomorphismus?
61. Was ist der Primring? Wie sehen die Primringe aus?
62. Was versteht man unter der Charakteristik eines Ringes?
63. Was ist der Frobenius-Homomorphismus?
64. Wie ist das direkte Produkt definiert?
65. Wie kann man herausfinden, ob R direktes Produkt von Ringen R_1, \dots, R_n ist (inklusive Begründung)?
66. Was versteht man unter einem Ideal?
67. Konstruiere den Faktorring und überprüfe die Wohldefiniertheit?
68. Wie lautet der Homomorphiesatz für Ringe?
69. Wie ist die Idealsumme und das Idealprodukt definiert?
70. Erkläre die Begriff Nullteiler, nullteilerfrei, Integritätsbereich.
71. Erkläre die Begriffe Teiler, Einheit, assoziiert, gemeinsamer Teiler, ggT.
72. Nenne einige Eigenschaften der Teilbarkeitstheorie in Integritätsbereichen.
73. Erkläre die Begriff prim und irreduzibel.
74. Zeige, dass prime Elemente stets irreduzibel sind.
75. Was versteht man unter einem faktoriellen Ring?
76. Zeige, dass die Primfaktorzerlegung in einem faktoriellen Ring eindeutig ist.
77. Was versteht man unter einem Hauptidealring?

78. Zeige, dass der ggT in einem Hauptidealring stets existiert und dass er als Linearkombination der beiden Elemente geschrieben werden kann.
79. Zeige, dass ein Hauptidealring ein faktorieller Ring ist.
80. Was versteht man unter einem euklidischen Ring?
81. Gib Beispiele für faktorielle, euklidische bzw. Hauptidealringe.
82. Was versteht man unter einem Primideal?
83. Wie lassen sich Primideale charakterisieren?
84. Was ist ein maximales Ideal?
85. Wie lassen sich Körper über Ideale charakterisieren (mit Beweis)?
86. Wie lassen sich maximale Ideal charakterisieren?
87. Formuliere und beweise den chinesischen Restsatz für Ringe.