Lineare Algebra II und Geometrie

LVA 405.080

C. Fuchs

Zusatzblatt zu den Beispielen aus Kapitel 3.3 **12.01.2018**

Beispiel Wir berechnen eine Orthogonalbasis zu $v_1 = {}^t(1,1,1), v_2 = {}^t(0,i,0), v_3 = {}^t(i,0,0)$ mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren. Zuerst setzen wir $w_1 = v_1$. Wir berechnen $w_1 \cdot w_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$ Weiters berechnen wir

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 1 + i \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/3 \\ 2i/3 \\ -i/3 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen wieder $\|w_2\|^2 = w_2 \cdot w_2 = (-i/3)(i/3) + (2i/3)(-2i/3) + (-i/3)(i/3) = 1/9 + 4/9 + 1/9 = 6/9 = 2/3$. Schließlich ist nun

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = v_3 - (i/3)w_1 - (-1/3)/(2/3)w_2 = v_3 - (i/3)w_1 + (1/2)w_2 \\ &= \begin{pmatrix} i - i/3 - i/6 \\ 0 - i/3 + i/3 \\ 0 - i/3 - i/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/2 \\ 0 \\ -i/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen wieder $w_3 \cdot w_3 = (i/2)(-i/2) + (-i)/2)(i/2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. Somit ist $\|w_1\| = \sqrt{3}, \|w_2\| = \sqrt{2/3} = 2/\sqrt{6}, \|w_3\| = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$ und die Vektoren $(1/\sqrt{3})w_1, (\sqrt{6}/2)w_2, (1/\sqrt{2})w_3$ bilden eine ONB von $\mathbb{C}^3$ bzgl. des kanonischen Skalarprodukts.

Beispiel Es sei $U := \langle \{ {}^t(1,i,1), {}^t(1,0,0) \} \rangle$. Wir setzen $v_1 = {}^t(1,0,0), v_2 = {}^t(1,i,1)$. Dann ist (v_1, v_2) eine geordnete Basis von U. Auf diese Basis wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, um eine ONB (w_1, w_2) zu erzeugen. Wir setzen $w_1 = v_1$. Weiters $w_2' = v_2 - (v_2 \cdot w_1)w_1 = v_2 - w_1 = {}^t(0,i,1)$. Es gilt $w_2' \cdot w_2 = 2$ und somit ist $w_2 = (1/\sqrt{2})w_2' = {}^t(0, i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. In den Spalten der gesuchten Koordinatenmatrix der Orthogonalprojektion auf U (entlang $U^\perp$) steht $\pi_U(e_1), \pi_U(e_2), \pi_U(e_3)$, wobei $\eta = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis bezeichnet. Wir berechnen $\pi_U(e_1) = (e_1 \cdot w_1)w_1 + (e_1 \cdot w_2)w_2 = w_1 = {}^t(1,0,0) = e_1$, $\pi_U(e_2) = (e_2 \cdot w_1)w_1 + (e_2 \cdot w_2)w_2 = (-i/\sqrt{2})w_2 = {}^t(0, 1/2, -i/2)$, $\pi_U(e_3) = (e_3 \cdot w_1)w_1 + (e_3 \cdot w_2)w_2 = (1/\sqrt{2})w_2 = {}^t(0, i/2, 1/2)$. Somit ist

$$M_{\eta\eta}(p_U) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$