Lineare Algebra II und Geometrie

LVA 405.080

C. Fuchs

Zusatzblatt zur Jordanschen Normalform **24.11.2017**

Wir geben hier den Beweis von Satz 2.3.10 zur Jordanschen Normalform:

Ad a):
Offensichtlich ist λ der einzige EV und es gilt $V = V_\varphi(\lambda)$. Sei $M_\varphi(x) = (x-\lambda)^{m_1}$. Definiere $U_1 := (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_1-1}(V) \neq \{0\}$. U_1 ist ein Unterraum von V_λ. Setze $k_1 = \dim U_1$. Es gibt dann k_1 Hauptvektoren der Stufe m_1 und mit 2.3.7 folgt $W_1 = T_1 \oplus \cdots \oplus T_{k_1}$, wobei jeweils $\dim T_i = m_1$ und die Koordinatenmatrix von $\varphi|_{W_1}$ gleich $\mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda), \cdots, J_{m_1}(\lambda))$ ist. Falls $W_1 \subsetneq V$, gibt es eine größte Zahl $1 \leq m_2 < m_1$ mit $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_2-1}(W_1) \subsetneq (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_2-1}(V)$. Es gibt dann $U_2 \subseteq V_\lambda$ mit $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_2-1}(V) = (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_2-1}(W_1) \oplus U_2$. Mit diesem U_2 wiederholen wir die Argumente von oben. Insgesamt folgt nach endlich vielen Schritten $V = V_\varphi(\lambda) = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p$ mit $\dim W_i = k_i m_i$, $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m_i-1}(W_i) = U_i$ ist ein Unterraum von V_λ der Dimension k_i und $\varphi|_{W_i}$ hat eine Koordinatenmatrix gleich $\mathrm{diag}(J_{m_i}(\lambda), \cdots, J_{m_i}(\lambda))$.

Ad b):
Da die Zahlenpaare $(k_1, m_1), \ldots, (k_p, m_p)$ unabhängig von der Wahl der Basis als Dimensionszahlen entstehen, sind sie eindeutig bestimmt und hängen alleine von φ ab.

Ad $V = V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_r)$:
Sei $v \in V_\varphi(\lambda_1) \cap (V_\varphi(\lambda_2) + \cdots + V_\varphi(\lambda_r))$. Da v von jeweils einer genügend großen Potenz von $\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V$ sowie von $(\varphi - \lambda_2 \mathrm{id}_V) \cdots (\varphi - \lambda_r \mathrm{id}_V)$ und somit vom ggT in $\mathrm{End}(V)$, also von 1, annulliert wird, folgt $v = 0$ und somit $V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_r) =: U$. Wir zeigen $U = V$: Sei $v \in V$. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion nach der Anzahl i der verschiedenen Nullstellen des Minimalpolynoms von φ bzgl. v (das ist das normierte Polynom kleinsten Grades $M_{\varphi,v}(x) \in K[x]$ mit $M_{\varphi,v}(\varphi)(v) = 0$). For $i = 1$ ist nichts zu zeigen. Im Induktionsschritt sei nun $M_{\varphi,v}(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_{i+1})^{s_{i+1}}$ mit $1 \leq s_j \leq n_j$ für $j = 1, \ldots, i+1 \leq r$. Somit ist $w := (\varphi - \lambda_{i+1} \mathrm{id}_V)^{s_{i+1}}(v) \in V_\varphi(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_\varphi(\lambda_i)$. Da $(\varphi - \lambda_{i+1} \mathrm{id}_V)|_{V_\varphi(\lambda_j)}$ für $j = 1, \ldots, i$ eine Bijektion ist, gilt $w = (\varphi - \lambda_{i+1} \mathrm{id}_V)^{s_{i+1}}(v_1) + \cdots + (\varphi - \lambda_{i+1} \mathrm{id}_V)^{s_{i+1}}(v_i)$ mit $v_j \in V_\varphi(\lambda_j)$. Setze $v_{i+1} = v - (v_1 + \cdots + v_n)$, dann gilt $v_{i+1} \in V_\varphi(\lambda_{i+1})$ und somit $v = v_1 + \cdots + v_i + v_{i+1} \in U$. Offenbar ist das charakteristische Polynom von $\varphi|_{V_\varphi(\lambda_j)}$ gleich $(-1)^{n_j}(x - \lambda_j)^{n_j}$ und daher $\dim V_\varphi(\lambda_j) = n_j$.

Ad c) und d):
Der Rest der Aussage ist klar.

Dies zeigt insgesamt die Aussage. //