Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3
C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

2. Übungstest, **WS 2017/18** **21.12.2017**

Name:...

Matrikelnummer:...

Wichtige Bemerkungen:

- **Alle Rechenschritte (inklusive Zwischenresultate und Lösungswege) sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!**
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe, verwenden Sie keine rote Farbe und keine Bleistifte.
- Erlaubte Hilfsmittel: Es sind keine schriftlichen Hilfsmittel und nur einfache Taschenrechner (mit einer Ausgabezeile) erlaubt.
- **Arbeitszeit:** 45 Minuten

Gegeben sei die folgende reelle (4×4)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $P_A(x) = x^4 - 2x^3$ (das muss nicht nachgeprüft werden). Beantworte die folgenden Fragen:

a) (3 Punkte) Berechne die Eigenwerte von A inklusive der algebraischen Vielfachheiten. Welche Möglichkeiten für die JNF von A gibt es mit diesem Wissensstand?

b) (5 Punkte) Berechne Basen der Eigenräume und somit die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A. Was wissen wir nun über die JNF von A?

c) (1 Punkt) Bestimme die JNF J von A.

d) (5 Punkte) Bestimme eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ so, dass $P^{-1}AP = J$.

e) (1 Punkt) Wie lautet das Minimalpolynom $M_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ von A?

Fasse nun A als Koordinatenmatrix bzgl. der kanonischen Basis η von $\mathbb{R}^4$ einer Bilinearform σ auf. Weiters seien $v_1 = {}^t(1, 0, -1, 0), v_2 = {}^t(0, 1, 1, 2)$ gegeben. Beantworte die folgenden Fragen:

f) (2 Punkte) Berechne $\sigma(v_1, v_2)$ und $\sigma(v_2, v_2)$.

g) (3 Punkte) Berechne $\sigma(2v_1 - v_2, 3v_2)$.