Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3

C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

9. Übungsblatt, WS 2017/18 — 14.12.2017

1. Sei σ eine ζ-Sesquilinearform auf V mit $\zeta \in \operatorname{Aut}(K)$ und β, γ Basen von V. Zeige, dass $\sigma(u,v) = {}^t\beta(u) M_\beta(\sigma)\zeta(\beta(v))$ für $u, v \in V$ gilt und begründe die Transformationsformel $M_\gamma(\sigma) = {}^tT M_\beta(\sigma)\zeta(T)$ mit $T = M_{\gamma\beta}(\mathrm{id}_V)$.

2. Sei $\zeta \in \operatorname{Aut}(K)$. Eine ζ-Sesquilinearform $\sigma : V \times V \to K$ wird alternierend genannt, wenn $\sigma(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeige, dass dann $\sigma(v,w) = -\sigma(w,v)$ gilt. Folgere daraus, dass σ somit eine Bilinearform sein muss (d.h. es gilt automatisch $\zeta = \mathrm{id}_K$). Wie sieht die Koordinatenmatrix von σ aus (also wann wird man eine Matrix alternierend nennen)?

3. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\beta = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von V und σ eine Bilinearform auf V mit
$$M_\beta(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zeige, dass $\gamma = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine geordnete Basis von V ist und berechne $M_\gamma(\sigma)$.

4. Gegeben seien $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $\psi(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Zeige, dass $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ eine Bilinearform ist, und bestimme die Koordinatenmatrix von σ bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.