Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3
C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

8. Übungsblatt, WS 2017/18 — 07.12.2017

1. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $\varphi = d/dX \in \operatorname{End}(V)$.
   a) Bestimme alle Eigenwerte von φ.
   b) Sei $U_n = \langle\{1, X, \ldots, X^n\}\rangle$. U_n ist φ-invariant, sodass $\varphi \in \operatorname{End}(U_n)$. Bestimme für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Basis β_n von U_n so, dass $M_{\beta_n\beta_n}(\varphi)$ JNF besitzt.

2. Gegeben sind die Matrizen in $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \\ -8 & 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Zeige durch Bestimmung der JNF zu A bzw. B: Die beiden Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom, sind aber nicht ähnlich.

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeige:

$$\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

   für alle $k \in \mathbb{N}$.

4. Zeige: Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$, dessen charakteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt, ist zu ${}^tA$ ähnlich.