Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3
C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

3. Übungsblatt, WS 2017/18 — 19.10.2017

1. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   a) $f \in \mathbb{R}[x]$ hat eine mehrfache Nullstelle (d.h. eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ mit Vielfachheit ≥ 2);
   b) f und f' haben eine gemeinsame Nullstelle, wobei $f' = f_1 + 2f_2x + \cdots + nf_nx^{n-1}$ die Ableitung von $f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n$ bezeichnet.

2. Berechne alle Nullstellen inklusive der Vielfachheiten der Polynome $f = x^3 - 2$ und $g = x^3 + x^2 + x + 1$ jeweils über $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{C}[x]$.

3. Gegeben sei die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A inklusive der algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

4. Gegeben sei die folgende reelle Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -9 & -7 & -8 & -14 \\ -3 & -3 & -3 & -5 & -7 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme die Eigenwerte inklusive der algebraischen Vielfachheiten sowie Basen für die Eigenräume. Wie lauten die geometrischen Vielfachheiten?