Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3

C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

12. Übungsblatt, WS 2017/18 — 25.01.2018

1. Zeige, dass im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^3$ durch $f(z_1, z_2, z_3) = {}^t(iz_1/\sqrt{2} - iz_2/\sqrt{6} + z_3/\sqrt{3}, 2iz_2/\sqrt{6} + z_3/\sqrt{3}, z_1/\sqrt{2} + z_2/\sqrt{6} + iz_3/\sqrt{3})$ eine isometrische Abbildung gegeben ist. Überprüfe anhand der Vektoren $v_1 = {}^t(1, -1, 2), v_2 = {}^t(i, 0, 0)$, dass $v_1 \cdot v_2 = f(v_1) \cdot f(v_2)$ und $\|v_1\| = \|f(v_1)\|$ gilt.

2. Gegeben sei die Matrix
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 & 1 \\ z & 1 & -1 & -1 \\ w & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Für welche $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist A eine orthogonale bzw. unitäre Matrix, d.h. gilt $A \in \mathrm{O}(4)$ bzw. $\in \mathrm{U}(4)$?

3. Auf $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{C}^3$ ist je ein unitäres Skalarprodukt gegeben durch
$$M_\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } M_{\eta'}(\sigma') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
wo η, η' je die kanonische Basis bezeichnet. Bestimme für $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ mit
$$M_{\eta\eta'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
die Matrix $M_{\eta'\eta}(\varphi^\wedge)$. Überprüfe $\varphi(v) \cdot w = v \cdot \varphi^\wedge(w)$ für $v = {}^t(1, 2), w = {}^t(1, 1, 1)$.

4. Eine Endomorphismus φ des unitären Vektorraumes $\mathbb{C}^3$ (kanonisches Skalarprodukt) ist gegeben durch
$$M_{\eta\beta}(\varphi) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3+2i & 2i & 6 \\ 3-6i & 3 & -2i \\ 2-6i & -6i & 3 \end{pmatrix},$$
wobei η bzw. e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis und β die Basis $e_1 + e_2, e_2, e_3$ bezeichnet. Bestimme $M_{\eta\eta}(\varphi)$ und überprüfe, ob φ hermitesch, schiefhermitesch oder unitär ist.