Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3

C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

11. Übungsblatt, WS 2017/18 — 18.01.2018

1. Im unitären Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$ (kanonisches Skalarprodukt) ist eine Basis durch

$$v_1 = {}^t(i, 1, 0), v_2 = {}^t(0, i, 1), v_3 = {}^t(0, 0, 1)$$

gegeben. Ermittle mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren eine Orthogonalbasis und orthonormiere diese anschliessend. Ermittle ausserdem die Transformationsmatrizen $M_{\gamma\beta}(\mathrm{id}_V)$ und $M_{\beta\gamma}(\mathrm{id}_V)$, wobei γ die gerade berechnete Orthonormalbasis ist. (Freiwilliger Zusatz: Wie sehen diese Matrizen allgemein aus, wenn auf eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ das Gram-Schmidtsche Verfahren angewandt wird (für die zweite Transformationsmatrix genügt es die Bauart anzugeben)?)

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ (kanonisches Skalarprodukt) sei aufgespannt durch ${}^t(2, 3, -1)$, ${}^t(1, -2, 2)$. Bestimme eine beliebige Orthonormalbasis von U und lege mit Hilfe dieser Basis die Orthogonalprojektion auf U und die Orthogonalprojektion auf $U^\perp$ je durch ihre Koordinatenmatrizen bzgl. der kanonischen Basis fest.

3. Sei V euklidisch oder unitär und $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis. Zeige für $v, w \in V$ und $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$:

$$\sum_{i \in I} |v \cdot v_i|^2 \leq \|v\|^2 \quad \text{und} \quad v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot v_i)(v_i \cdot w)$$

(das ist die sogenannte Besselsche Ungleichung bzw. Parsevalsche Gleichung).

4. Gegeben sei auf $V = \langle \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$ das Integralskalarprodukt

$$\sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Bestimme $M_\beta(\sigma)$ für die Basis $\beta = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ sowie eine Orthonormalbasis von V.