Lineare Algebra II und Geometrie

Übung, LVA 405.081-3

C. Fuchs, C. Hutle, C. Karolus

10. Übungsblatt, WS 2017/18 — 11.01.2018

1. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrischen Bilinearformen sind. Liegen Skalarprodukte vor?

   a) Sei $V = M(n,m)(\mathbb{R})$ und $\sigma(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

   b) Es seien $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, die Elemente $m_1, \ldots, m_k \in M$ verschieden, $V := \{f : M \to \mathbb{R}\}$ und $\sigma(f,g) = f(m_1)g(m_1) + \cdots + f(m_k)g(m_k)$.

   c) Sei V der Vektorraum der konvergenten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $\sigma((a_n)_n, (b_n)_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$.

2. Sei V ein unitärer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeige: $v \cdot w = 0 \Rightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (Phytagoräischer Lehrsatz), $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (Parallelogrammregel) und $4(v \cdot w) = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2$ (Darstellung von $\cdot$ durch $\| \ \|$). Zeige ausserdem, dass $v \cdot w = 0 \Leftarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ nicht gilt.

3. Beweise die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung durch direkte Rechnung im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit $n = 1, 2, 3$ und dem kanonischen Skalarprodukt.

4. Eine Gerade L ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$ von der Form $x = v + \lambda w$ mit festem $v \in \mathbb{R}^2$ und einem festen Richtungsvektor $w \in \mathbb{R}^2$. Ein Vektor $s \in \mathbb{R}^2$ heißt orthogonal zu L, wenn $s \cdot (x - y) = 0$ für alle $x, y \in L$. Zeige:

   a) Ist $L = v + \mathbb{R}w$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ und $s \in \mathbb{R}^2$, so ist s orthogonal zu $L \Leftrightarrow s \cdot w = 0$.

   b) Ist $L = \{{}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ so ist $s = {}^t(a_1, a_2)$ orthogonal zu L.

   c) Für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in L$, so dass $(x - u)$ orthogonal zu L ist. Für dieses x gilt $d(u, L) := \min\{\|x - u\|; x \in L\} = \|x - u\|$ (d.h. der senkrechte Abstand ist der kürzeste).

   d) Ist L eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, $s \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ orthogonal zu L und $v \in L$ beliebig, so ist $L = \{x \in \mathbb{R}^2; s \cdot (x - v) = 0\}$. Ist $u \in \mathbb{R}^2$, so folgt c) aus $d(u, L) = |s \cdot (u - v)|/\|s\|$. Ist speziell $L = \{{}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ und $u = {}^t(u_1, u_2)$, so ergibt sich $d(u, L) = |a_1u_1 + a_2u_2 - b|/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Der Vektor $n = s/\|s\|$ ist normiert und ist orthogonal zu L; er heisst der Normalvektor zu L. Man nennt $L = \{x \in \mathbb{R}^2; n \cdot (x - v) = 0\}$ die Hesse Normalform von L; für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ ist $d(u, L) = |n \cdot (u - v)|$, die Funktion $n \cdot (u - v)$ misst also mit Vorzeichen den Abstand von u zu L.