Diskrete Mathematik

LVA 405.020

C. Fuchs
Inhaltsübersicht **31.01.2018**

Inhaltsübersicht

Die diskrete Mathematik beschäftigt sich, im Gegensatz zur Analysis, mit diskreten anstatt kontinuierlichen (stetigen) Abläufen. Man kann die diskrete Mathematik auch als die Theorie der endlichen Mengen bezeichnen. Eine Grundfrage ist dabei immer: Wie groß ist die Menge? Diese Frage wird typischerweise in der Kombinatorik beantwortet. Oft sind auf der Menge auch Beziehungen zwischen den Elementen gegeben. Ein eindrücklicher Spezialfall bilden die sogenanten Graphen, die in der Graphentheorie behandelt werden. Bevor wir uns Kombinatorik und Graphentheorie im Detail ansehen, müssen wir uns aber über die Grundlagen unterhalten. Daher beginnen wir mit den natürlichen Zahlen und betrachten unendliche Mengen. Anschließend behandelt wir die elementare Kombinatorik. Die grundlegende Theorie der Graphen und Netzwerke schließt die Vorlesung ab.

Die Vorlesung behandelt (voraussichtlich) die folgenden Themen:

§1. Die natürlichen Zahlen
vollständige Induktion, Arithmetik

§2. Unendliche Mengen
endliche vs. unendliche Mengen, abzählbare vs. überabzählbare Mengen

§3. Elementare Kombinatorik
elementares Zählen, Schubachschlussprinzip, Inklusions-/Exklusionsprinzip, Kombinationen, Repetitionen, Permutationen, Variationen, Partitionen

§4. Graphentheorie
Grundbegriffe, Wege, Kreise, Zusammenhang, planare Graphen

§5. Netzwerke[1]
kürzeste Wege, minimale Bäume, maximale Flüsse, Anwendungen

Bei Fragen oder Bemerkungen (speziell Hinweise auf Fehler aller Art sind willkommen) schicken Sie ein Email an clemens.fuchs@sbg.ac.at.

[1] Das Kapitel "§5. Netzwerke" wurde im WS17/18 nicht behandelt; stattdessen wurde das Kapitel "§0. Nachtrag" eingefügt in dem unter anderem Permutationen behandelt wurden.

§0. Nachtrag

0.1 Familien, Folgen und Multimengen

0.1.1 Familien und Folgen
Beispiele: Wörter, Matrizen

0.1.2 **Satz** Folgen vs. n-Tupel
Beispiel: $A = \{a, b\}$.

0.1.3 Multimengen
Beispiele: $f : \underline{3} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1$; Auswahl n aus k mit Wiederholungen und ohne Rücksicht auf die Reihenfolge

0.2 Permutationen

0.2.1 Permutationen
Beispiel: (12)(34567), (1247)(35)(6)

0.2.2 Zykel, Transposition, Fixpunkt, Zyklendarstellung, Interpretation als Zusammensetzung von Abbildungen
Beispiele: $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ ... Drehgruppe des Stabes, $\mathscr{S}_3$ ... Drehgruppe des gleichseitigen Dreiecks

0.2.3 **Satz** $\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$

0.2.4 **Satz** Signum ist wohldefiniert

0.2.5 Signum + Eigenschaften

0.2.6 Determinante einer $n \times n$-Matrix

§1. Die natürlichen Zahlen

1.1 Vollständige Induktion

1.1.1 Motivierendes Beispiel: $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$

1.1.2 Peano Axiomensystem

1.1.3 Prinzip der vollständigen Induktion
Beispiel: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (F. Maurolicus, 1575)

1.1.4 Varianten und Bemerkungen
Weiter Beispiele: es gibt 2^n Teilmengen einer n-Menge, n-Tupel

1.2 Arithmetik

1.2.1 Darstellung der natürlichen Zahlen

1.2.2 Addition und Multiplikation

1.2.3 **Satz** Summe und Produkt sind wohldefiniert.

1.2.4 **Satz** (Eigenschaften)

§2. Unendliche Mengen

2.1 Endliche vs. unendliche Mengen

2.1.1 Endlich, unendlich

2.1.2 **Satz** $|A| = \infty \Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to A$ mit f injektiv.

2.1.3 **Satz** A ist unendlich $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to A$ mit f injektiv und $f(\mathbb{N}) \subset A$.

2.1.4 gleichmächtig

2.2 Abzählbare vs. überabzählbare Mengen

2.2.1 Begriffe

2.2.2 **Satz** $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ sind abzählbar

2.2.3 **Satz** $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

2.2.4 **Satz** $[0, 1]$ ist überabzählbar.
Beispiel

2.2.5 **Satz** $(0, 1)$ ist überabzählbar.

2.2.6 **Satz** $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

2.2.7 **Satz** Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

2.2.8 $\leq, <$ für beliebige Mengen

2.2.9 **Satz** $|A| < |\text{Potenzmenge von } A|$.

2.2.10 Transfinites Zählen, Kontinuumshypothese

§3. Elementare Kombinatorik

3.1 Elementares Zählen

3.1.1 Gleichheitsprinzip

3.1.2 Additionsprinzip

3.1.3 Prinzip der doppelten Abzählung
Beispiel: 32 Studierende, 32 Studenten mit je 5 befreundeten Studentinnen, n Studentinnen mit je 8 befreundeten Studenten
Beispiel: Die duchschnittliche Anzahl der Teiler von n ist $\log(n)$.

3.1.4 Multiplikationsprinzip
Beispiel: A-NN-1234

3.1.5 (Dirichletsches) Schubfachprinzip
Beispiel: Turnier mit 10 Mannschaften, jeder gegen jeden. Behauptung: Nach dem ersten Tag haben mind. 2 Mannschaften diesselbe Anzahl von absolvierten Spielen.

3.1.6 Inklusions-Exklusions-Prinzip

3.1.7 Siebprinzip
Beispiel: $\{1 \leq n \leq 1000; 2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n\}$

3.1.8 Grundprobleme der klassischen Kombinatorik: $f : N \to R$, $|N| = k, |R| = n$, Kugel-Fächer- und Wortinterpretation Die Abbildung f kann interpretiert werden als

- Wort: die Elemente von N sind die Positionen des Wortes, $f(i)$ gibt den Buchstaben an Position i an,
- Zuordnung: N ist die Menge der Kugeln und R die Menge der Fächer, $f(i)$ gibt an, in welches Fach die Kugel mit Nummer i kommt,
- Auswahl: $f(i)$ gibt an, welches Element aus R im Schritt i ausgewählt wird.

Sind die Kugeln einfärbig, so werden die Abbildungen f bis auf Äquivalenz gezählt, wobei zwei Abbildung f_1, f_2 äquivalent heißen, wenn eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}(N)$ vom Grad k existiert mit $f_2 = f_1 \circ \pi$.
Sind die Fächer einfärbig, so werden entsprechend die Abbildungen f bis auf Äquivalenz gezählt, wobei f_1, f_2 nun äquivalent heißen, wenn eine Permutation $\rho \in \mathfrak{S}(R)$ vom Grad n exisitert mit $f_2 = \rho \circ f_1$.
Bezüglich dieser Äquivalenzrelationen zerfallen die Abbildungen von N nach R in Klassen, die in den Grundproblemen gezählt werden sollen.
Zusammenfassend erhält man:

	f beliebig	f injektiv	f surjektiv	f bijektiv
Kugeln gefärbt Fächer gefärbt				
Kugeln gefärbt Fächer einfärbig				
Kugeln einfärbig Fächer gefärbt				
Kugeln einfärbig Fächer einfärbig				

3.2 Kombinationen

3.2.1 k-Kombinationen und Wörter
Beispiel: 2-Kombinationen von 4

3.2.2 **Satz** Eigenschaften von Binomialkoeffizienten
Beispiel zur Illustration der Rekursionsformel

3.2.3 Pascalsches Dreieck

3.2.4 **Satz** Identitäten mit Binomialkoeffizienten inklusive Binomischer Lehrsatz

3.3 Repetitionen

3.3.1 Begriff
Beispiel: 2-Repetitionen von 4

3.3.2 Anzahlformel
Beispiel: Wurf mit 5 Würfeln

3.4 Permutationen

3.4.1 Begriff
Beispiel: 2-Permutationen von 4

3.4.2 **Satz** inklusive $(n)_k = n!/(n-k)!$.

3.4.3 Stirling-Zahlen der 1. Art: $s_0(n,k), s(n,k) = (-1)^{n-k} s_0(n,k)$, Eigenschaften (insbesondere Rekursionsformel)
Beispiel: $n = 3, k = 2$

3.4.4 **Satz** Anzahl der fixpunktfreien Permutationen vom Grad n
Beispiel: $n = 2$

3.5 Variationen

3.5.1 Begriff: k-Variation von n
Beispiel: 2-Variationen von 4

3.5.2 n^k

3.5.3 Typ einer k-Variation vom Typ n, Multinomialkoeffizient
Spezialfall $n = 2$
Beispiel: a) MISSISSIPPI, b) 4-Variationen vom Typ $1^2 2^1 3^1$.

3.5.4 Interpretationen

3.6 Partitionen

3.6.1 Wachstumsbeschränkte Wörter
Beispiele: $n = 3$

3.6.2 k-Partitionen von n

3.6.3 **Satz**
Beispiel: Partitionen von 3

3.6.4 Verschiedene Interpretationen von k-Partitionen von n

3.6.5 Stirling-Zahlen der 2. Art

3.6.6 **Satz** Anzahl der surjektiven Abbildungen ist $n!S(k, n)$

3.6.7 Geordnete k-Zahlpartitionen von n
Beispiel: $n = 5$

3.6.8 **Satz** $p(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.
Beispiel: Veranschaulichung mit den 3-Zahlpartitionen von 5

3.6.9 Ungeordnete k-Zahlpartitionen von n
Beispiel: $n = 5$

3.6.10 **Satz** a) $P(n, 1) = P(n, n) = 1$, b) $P(n, k) = P(n-k, k) + P(n-1, k-1)$.

§4. Graphentheorie

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Definition von Graph, adjazent, inzident, endlich, Ordnung, Größe, Diagramm, Schlingen, Mehrfachkanten
Beispiel: $V = \{v_1, \ldots, v_4\}, E = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$

4.1.2 Grad, isoliert, Gradfolge

4.1.3 **Satz** Handschlaglemma und Folgerung
Beispiel: Können 333 Telefone so zusammengeschaltet werden, dass jedes mit 3 direkt verbunden ist? Nein.

4.1.4 Teilgraph, induzierte Teilgraphen
Beispiel

4.1.5 Isomorphismus (solche Graphen haben dieselbe Ordnung, Größe und Gradfolge; sie sind aber nicht dadurch bestimmt); Automorphismen
Beispiel

4.1.6 k-regulär, vollständig

4.2 Wege, Kreise, Zusammenhang

4.2.1 Weg (Start-, Endknoten, Länge, einfach) und Kreis (einfach)
Beispiele

4.2.2 Zusammenhang, Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation
Beispiel

4.2.3 **Satz** Streichen von Kanten auf einem einfachen Kreis erhält Zusammenhang

4.2.4 Abstand (definiert eine Metrik)

4.2.5 kreisfrei, Wald, Baum, Spannbaum (Gerüst), Brücke (Isthmus)
Beispiele

4.2.6 **Satz** Jeder Baum a) enthält mindestens 2 Knoten vom Grad 1; b) erfüllt $|E| = |V| - 1$.

4.2.7 **Satz** Jeder zusammenhängende Graph a) hat einen Spannbaum; b) ist ein Baum genau dann, wenn = gilt.
Beispiel für Spannbaum

4.2.8 Algorithmus *Breitensuche* (Breadth-First):
Eingabe: Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Der Algorithmus findet einen Spannbaum (einer Komponente) und beantwortet dabei die Frage, ob G zusammenhängend ist.

(1) Starte mit einem Knoten und gib ihm die Nummer 1, 1 ist der aktuelle Knoten.
(2) Der aktuelle Knoten habe die Nummer i und es seien bereits die Nummern $1, \ldots, r$ vergeben. Falls $r = n$, stop. Andernfalls betrachte die noch nicht nummerierten Nachbarn von i und gibt ihnen der Reihe nach die Nummern $r + 1, r + 2, \ldots$ und füge die Kanten $i(r + 1), i(r + 2), \ldots$ hinzu. Falls nun die Nummer $i + 1$ nicht existiert, stop (G ist nicht zusammenhängend), andernfalls gehe zum Knoten mit Nummer $i + 1$, dies ist die neue aktuelle Nummer, und iteriere (2).

Beispiel

4.2.9 Algorithmus *Tiefensuche* (Depth-First):
Eingabe: Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Wie bei 4.4.4.

(1) Starte mit einem Knoten und gib ihm die Nummer 1, 1 ist der aktuelle Knoten. Wähle einen Nachbarn von 1 und gib ihm die Nummer 2. Füge die Kante 12 ein. 2 ist nun der aktuelle Knoten und 1 ist der Vorgängerknoten.
(2) Der aktuelle Knoten habe Nummer i und es seien die Nummern $1, \ldots, r$ bereits vergeben. Falls $r = n$, stop. Andernfalls wähle einen noch nicht nummerierten Nachbarn von i, gib ihm die Nummer $r + 1$, und füge die Kante $i(r + 1)$ ein. Der aktuelle Knoten ist nun $r + 1$ und i der Vorgängerknoten. Falls keine nichtnummerierten Nachbarn von i existieren, gehe zum Vorgängerknoten von i, falls $i > 1$. Dies ist nun der aktuelle Knoten. Iteriere (2). Wenn $i = 1$ ist, und keine nicht nummerierten Nachbarn existieren, so ist G nicht zusammenhängend, stop.

Beispiel

4.3 Bipartite und planare Graphen

4.3.1 Bipartite Graphen
Beispiele, $K_{n,m}$

4.3.2 **Satz** Charakterisierung von zusammenhängenden bipartiten Graphen

4.3.3 planar, eben $\to$ Flächen, Gebiete
Beispiel: Hexaeder

4.3.4 **Satz** (Eulersche Polyederformel): $n - m + f = 2$

4.3.5 **Satz** Ein planarer zshg Graph mit $n \geq 3$ Knoten hat $\leq 3n - 6$ Kanten.

4.4 Weitere Begriffe

4.4.1 Adjazenzmatrix
Beispiel

4.4.2 Inzidenzmatrix
Beispiel

4.4.3 Gerichtete Graphen

4.4.4 Wegenetze, Länge, kürzeste Wege

Literatur

1. K.-H. Zimmermann, Diskrete Mathematik, Books on Demand, 2006, ISBN978-3-8334-5529-2
2. M. Aigner, Diskrete Mathematik, Vieweg+Teubner, 2009, ISBN978-3-8348-0084-8
3. A. Beutelspacher und M.-A. Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger, Vieweg+Teubner, 2011, ISBN978-3-8348-1248-3
4. G.+S. Teschl, Mathematik für Informatiker (Band 1, Diskrete Mathematik und Lineare Algebra), Springer, 2008, ISBN978-3540-77431-0