Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021-3, M_B.114

C. Fuchs, M. Hittmeir, B. Schratzberger

4. Übungsblatt, WS 2017/18 **19.12.2017**

1. Für die durch
$$a_0 = 2, \quad a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1$$
induktiv definierte Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ beweise man folgende explizite Darstellung
$$a_n = \frac{n+2}{n+1}.$$

2. Die Folge $(n!)$ wird induktiv definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = n!(n+1)$ für alle $n \geq 0$. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Beweise weiter, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! > 2^{n-1}$.

3. Wo liegt der Fehler im folgenden Beweis der Aussage, dass in einer Gruppe von Tieren, in der ein Elefant ist, alle Tiere Elefanten sein müssen.
Beweis (durch vollständige Induktion nach $n \geq 1$):
$n = 1$: Besteht eine Gruppe, in der ein Elefant ist, nur aus einem Tier, so sind alle Tiere, nämlich nur das eine, Elefanten.
$n \to n+1$: Die Gruppe von Tieren kann auf eine Weise in einer Reihe angeordnet werden, dass der eine Elefant unter den ersten n Tieren und unter den letzten n Tieren ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann in der Gruppe der ersten n Tiere alle Elefanten und in der Gruppe der letzten n Tiere alle Elefanten. Also sind alle $n+1$ Tiere Elefanten. //

4. Berechne mit Hilfe der Definition $4+5, 5+4, 4 \cdot 5, 5 \cdot 4$ und zeige, dass $1 \cdot n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

5. Zeige, dass für $k, l \in \mathbb{N}_0$ aus $k + l = 0$ stets $k = l = 0$ folgt.

6. Beweise, dass $(n+m)+k = n+(m+k)$ für alle $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

7. Zeige, dass eine Menge A genau dann unendlich ist, wenn A eine echte Teilmenge B besitzt, welche gleichmächtig mit A ist.

8. Sei A eine abzählbare Menge und n eine natürliche Zahl. Zeige, dass A^n abzählbar ist.