# Diskrete Mathematik

**Übung, LVA 405.021-3, M_B.114**

**C. Fuchs, M. Hittmeir, B. Schratzberger**

## 3. Übungsblatt, WS 2017/18 — 12.12.2017

1. Berechne die Determinanten der folgenden reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Berechne die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a_{ij} = 0$ für alle Indizes mit $i > j$. Berechne $\det(A)$. Zeige damit, dass $\det(E_n) = 1$ für die $n \times n$-Matrix $E_n = (e_{ij})$ mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $= 0$ sonst.

4. Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$. Angenommen es gilt für gegebene $1 \leq i < j \leq n$, dass $a_{ik} = a_{jk}$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Verwende Aufgabe 7 des 2. Übungsblattes (mit $\tau = (ij)$), um $\det(A) = 0$ zu zeigen.

5. Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiere $A_{ij}(\lambda) = (a'_{ij})$ als jene $n \times n$-Matrix für die gilt $a'_{il} = a_{il} + \lambda a_{jl}$ für $l = 1, \ldots, n$ und $a'_{kl} = a_{kl}$ für $k \neq i$. Zeige, dass $\det(A_{ij}(\lambda)) = \det(A)$.

6. Überprüfe, welche der fünf Peano-Axiome von den folgenden Mengen $M$ und "Nachfolgeabbildungen" $S : M \to M$ erfüllt werden:
   a) $M = \mathbb{R}, S(x) = x + 1$,
   b) $M = \mathbb{Z}, S(k) = k + 1$,
   c) $M = \{-1, 1\}, S(n) = -n$,
   d) $M = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}, S(z) = z^2$.

7. Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

8. Finde für folgende Summen einen "geschlossenen Ausdruck" und bestätige diese Summenformel induktiv:
   a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$,
   b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n(n+1)$.