Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021-3, M_B.114

C. Fuchs, M. Hittmeir, B. Schratzberger

1. Übungsblatt, WS 2017/18 — 28.11.2017

1. Zeichne das Hasse-Diagramm der unter Teilbarkeit geordneten Menge $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}, \mid)$ und bestimme alle minimalen, maximalen, kleinsten und größten Elemente, soferne diese existieren.

2. Sei $(A, \sqsubseteq)$ eine geordnete Menge und es sei a ein größtes Element von A. Beweise:
   a) Sei b ein weiteres größtes Element von A. Dann folgt $a = b$.
   b) a ist ein maximales Element von A.
   c) Es gibt keine weiteren maximalen Elemente in A, d.h. sei c ein maximales Element von A, dann gilt: $c = a$.

3. Welche der folgenden Relationen auf $A = \{a, b, c, d\}$ sind Funktionen (von A nach A)? $R_1 = \{(a, d), (c, d), (d, a), (c, d), (b, a)\}$, $R_2 = \{(d, b), (a, b), (c, a), (d, b)\}$, $R_3 = \{(d, b), (c, b), (b, b), (a, b)\}$, $R_4 = \{(d, a), (c, d), (a, b), (b, a), (a, a)\}$.

4. Beantworte:
   a) Ist die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn wir im Definitions- und Bildbereich jeweils $\mathbb{Q}$ nehmen?
   b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}, x \mapsto \frac{3x+4}{2x-1}$ bijektiv ist.

5. Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $C_1, C_2 \subseteq A$ und $D_1, D_2 \subseteq B$. Zeige:
   a) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
   b) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$

6. Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x \mapsto x^2 + 1$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ x \mapsto 2x - 1$. Bestimme $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ und $g \circ g$.

7. Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $C_1, C_2 \subseteq A$ und $D_1, D_2 \subseteq B$. Zeige:
   a) $D_1 \subseteq D_2 \Longrightarrow f^{-1}(D_1) \subseteq f^{-1}(D_2)$
   b) Für f injektiv gilt: $f(C_1) = f(C_2) \Longrightarrow C_1 = C_2$
   c) Für f surjektiv gilt: $f^{-1}(D_1) = f^{-1}(D_2) \Longrightarrow D_1 = D_2$

8. Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $C_1, C_2, S \subseteq A$. Beweise oder gib ein Gegenbeispiel an:
   a) $f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$?
   b) $S = f^{-1}(f(S))$
   c) $S \subseteq f^{-1}(f(S))$