Grundlagen der Mathematik

Übung, LVA 405.010

C. Fuchs

6. Übungsblatt, WS 2016/17 — 17.11.2016

1. Zeige, dass die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind. Wie lautet die Klasseneinteilung? a) $R = \{(a, b); a, b \in \mathbb{N} \wedge (a + b \text{ gerade})\}$ auf $\mathbb{N}$; b) $R = \{(a, b); a, b \in \mathbb{Z} \wedge (a^2 - b^2 \text{ ist durch 3 teilbar})\}$ auf $\mathbb{Z}$.

2. Zeige, dass auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Veranschauliche die Äquivalenzklassen, sowie die Klasseneinteilung in $\mathbb{N}^2$. Wie könnte man die Äquivalenzklassen interpretieren?

3. Zeige, dass auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ durch $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Veranschauliche wieder die Äquivalenzklassen, sowie die Klasseneinteilung. Wie könnte man die Äquivalenzklassen nun interpretieren?

4. Seien $(A, \leq_1)$ und $(A, \leq_2)$ halbgeordnete Mengen. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf $A_1 \times A_2$ durch $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \leq_1 y_1 \wedge x_2 \leq y_2$. Zeige, dass $\leq$ eine Halbordnung ist (genannt die Produktordnung auf $A_1 \times A_2$).

5. Zeichne das Hasse-Diagramm der unter Teilbarkeit halbgeordneten Menge $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ und bestimme alle minimalen und maximalen Elemente. Gibt es ein kleinstes oder größtes Element?

6. Berechne die transitive Hülle der Relation $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1)\}$ auf $\{1, 2, 3, 4\}$.

7. Seien R, S homogene Relationen auf A. Zeige: a) $(R^*)^{-1} = (R^{-1})^*$; b) $(R \cup S)^* = (R^* \circ S)^* \circ R^*$; c) $R^* \circ S^* \subseteq (R \cup S)^*$.

8. Zeige, dass jede reflexive (symmetrische, transitive) Relation identisch ist mit ihrer reflexiven (symmetrischen, transitiven) Hülle.