Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021-5
C. Fuchs, M. Hittmeir, C. Karolus, W. Schmid

2. Übungsblatt, WS 2016/17 06.12.2016

1. Überprüfe, welche der fünf Peano-Axiome von den folgenden Mengen M und "Nachfolgeabbildungen" $S : M \to M$ erfüllt werden:
   a) $M = \mathbb{R}, S(x) = x + 1$,
   b) $M = \mathbb{Z}, S(k) = k + 1$,
   c) $M = \{-1, 1\}, S(n) = -n$,
   d) $M = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}, S(z) = z^2$.

2. Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

3. Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Beweise duch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5. Für die durch
$$a_0 = 2, \quad a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1$$
induktiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots,)$ beweise man folgende explizite Darstellung
$$a_n = \frac{n+2}{n+1}.$$

6. Die Folge $(n!)$ wird induktiv definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = n!(n+1)$ für alle $n \geq 0$. Beweise, dass $n! > 2^{n-1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ und $n! \leq n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7. Berechne mit Hilfe der Definition $2 + 7, 7 + 2, 2 \cdot 7, 7 \cdot 2$ und zeige, dass $n \cdot 1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

8. Wir definieren $\leq$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \leq m :\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}\colon m = n + k)$. Zeige, dass $\leq$ eine lineare Halbordnung auf $\mathbb{N}$ ist. Zeige weiter, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein bzgl. $\leq$ kleinstes Element besitzt.