Diskrete Mathematik

Übung, LVA 405.021-5

C. Fuchs, M. Hittmeir, C. Karolus, W. Schmid

1. Übungsblatt, WS 2016/17 — 29.11.2016

1. Sei $\pi = (153)(24)$ und $\sigma = (136)(25)$. Stelle $\pi\sigma$ als Produkt disjunkter Zykeln sowie als Produkt von Transpositionen dar.
2. Sei π eine Permutation von n und $\tau = (ij)$ mit $1 \leq i < j \leq n$. Sei weiter k die Anzahl der disjunkten Zykeln in der Zyklendarstellung von π. Zeige, dass $\tau\pi$ als Produkt von $k-1$ bzw. $k+1$ diskjunkten Zykeln dargestellt werden kann, abhängig davon, ob i, j in π in verschiedenen Zykeln bzw. im selben Zykel vorkommen.
3. Gegeben sei die Permutation $\pi = (147)(258)(369)$ in $\mathscr{S}_{10}$. Gib die Matrixdarstellung von π an, sowie die Zyklendarstellung von π^{-1}. Gib eine Darstellung von π als Produkt von Transpositionen an und berechne das Signum dieser Permutation.
4. Gegeben seien die beiden Permutationen $\sigma = (2437)(5698)$ und $\pi = (2539)(4876)$. Stelle beide Permutationen als Produkt von Transpositionen dar, bestimme damit ihr Signum, und berechne $\sigma\pi\sigma^{-1}$.
5. Beweise die folgenden Eigenschaften für das Signum einer Permutation: $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^r$ falls π als Produkt von r Transpositionen geschrieben werden kann, $\operatorname{sgn}(\pi\rho) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sign}(\rho)$, $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$.
6. Sei $\mathscr{A}_n$ die Menge der geraden Permutationen von n. Zeige, dass $\mathscr{S}_n \backslash \mathscr{A}_n = \{\sigma\tau; \sigma \in \mathscr{A}_n\} =: \mathscr{A}_n\tau$ für jede ungerade Permutation $\tau \in \mathscr{S}_n$ gilt.
7. Sei $n \geq 2$ und $\tau_0 = (12)$. Zeige, dass es zu jeder beliebigen Transposition $\tau \in \mathscr{S}_n$ ein $\sigma \in \mathscr{S}_n$ mit $\tau = \sigma\tau_0\sigma^{-1}$ gibt.
8. Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$